

Ci 6  
(274/1960)

UDC 624.072.7

# ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

CIVIL ENGINEERING AND BUILDING CONSTRUCTION  
SERIES No. 6

HARALD KYRKLUND

**Über die Einschätzung von Biegespannungen in gekrümmten  
Balken**

*Finnish Contribution No. 13*

HELSINKI 1960

## ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

*... a Scandinavian contribution to international engineering sciences*

Published under the auspices of the Scandinavian Council for Applied Research

in *Denmark* by the Danish Academy of Technical Sciences

in *Finland* by the Finnish Academy of Technical Sciences, the Swedish Academy of Engineering Sciences in Finland, and the State Institute for Technical Research

in *Norway* by the Norwegian Academy of Technical Science and the Royal Norwegian Council for Scientific and Industrial Research

in *Sweden* by the Royal Swedish Academy of Engineering Sciences, the Swedish Natural Science Research Council, and the Swedish Technical Research Council

*Acta Polytechnica Scandinavica consists of the following sub-series:*

*Chemistry including Metallurgy Series, Ch*

*Civil Engineering and Building Construction Series, Ci*

*Electrical Engineering Series, El*

*Mathematics and Computing Machinery Series, Ma*

*Mechanical Engineering Series, Me*

*Physics including Nucleonics Series, Ph*

For subscription to the complete series or to one or more of the sub-series and for purchase of single copies, please write to

### ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA PUBLISHING OFFICE

Box 5073  
Stockholm 5

Phone 61 47 53

This issue is published by  
THE SWEDISH ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES IN FINLAND  
Helsingfors, Finland





UDC 624.072.7

## ÜBER DIE EINSCHÄTZUNG VON BIEGESpanNUNGEN IN GEKRÜMMTEN BALKEN

HARALD KYRKLUND

ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

Civil Engineering and Building Construction Series C1 6

(AP 274/1960)

VTT Rotaprintpaino 1980

222/4

## INHALT

	Seite
VERZEICHNIS DER BEZEICHNUNGEN .....	5
ÜBER DIE EINSCHÄTZUNG VON BIEGESpannungen IN GEKRÜMMTEN BAL- KEN .....	7
Rechteckprofile .....	10
Balken mit Kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt .....	13
Trapezprofile .....	15
Trapezförmige Profile mit gekrümmter Basis .....	17
Anwendung auf einen Lasthaken .....	18
Besprechung des reinen Trapezprofils .....	21
Rohrförmige Profile .....	25
Zusammengesetzte horizontalsymmetrische Proportionalprofile .....	30
Horizontalsymmetrische, nichtproportionale Profile .....	34
Horizontalsymmetrische zusammengesetzte Profile mit der Masse gegen die Mitte .....	38
Horizontal unsymmetrische Profile .....	38
Horizontal asymmetrische, nichtproportionale Profile .....	41
Umgekehrte U-Profile .....	42

Zusammenfassung .....	43
Anwendungsbeispiel .....	43
Deformationsbestimmungen .....	45
Berechnung der Funktion Z für zusammengesetzte Profile .....	46
Rechteckelement .....	46
Dreieckelemente .....	48
Trapezelemente .....	50
Trapezähnliche Profile mit ausbuchtenden Basisstrecken .....	51
SCHRIFTTUM .....	56

## VERZEICHNIS DER BEZEICHNUNGEN

A	Flächeninhalt des Profils ( $\text{cm}^2$ )
D	Aussendurchmesser eines Rohrprofils (cm)
H	gesamte Profilhöhe eines zusammengesetzten Profils (cm)
I	Trägheitsmoment ( $\text{cm}^4$ ) des Profils, bzw. Trägheitsmoment der positiven Profilfläche bei einem zusammengesetzten Profil
K	eine Funktion, die dem Quadrate vom Aushöhlungsgrad näherungsweise proportional ist
P	Belastung (kp)
M	Biegemoment (kpcm); positiv anzusetzen, wenn es die Krümmung zu vermehren strebt
W	Widerstandsmoment ( $\text{cm}^3$ )
Z	von der Profilform und der Krümmung des Balkens abhängige Funktion nach Gl. (4)
	Funktion für die Bruttofläche (positive Fläche) eines Rohrprofils bzw. zusammengesetzten Profils ( $\text{cm}^4$ )
a	Breite der inneren Basis oder des inneren Flansches des Profils (cm)
b	Breite der äusseren Basis oder des äusseren Flansches des Profils (cm)
b/a	Basisverhältnis bei Trapezen oder trapezförmlichen Profilen
b'	gesamte freie Länge des unteren Flansches bei einem zusammengesetzten Profil (cm)
b'/a	Aushöhlungstiefe bei horizontalsymmetrischen zusammengesetzten Profilen
b"/a"	reduzierte Aushöhlungstiefe bei horizontal asymmetrischen zusammengesetzten Profilen
d	Durchmesser von Kreisprofilen (cm), bzw. Innendurchmesser von Rohren
e <sub>1</sub>	Abstand der Schwerpunktklinie von den innersten Fasern (cm)
e <sub>2</sub>	" " " von den äussersten Fasern (cm)

$f$	$1 - f'$ Völligkeitsfaktor, Völligkeitsgrad oder Völligkeit des Profils
$f'$	Aushöhlungsgrad des Profils $= \left(\frac{h}{H}\right)^2$ , $\frac{b' \cdot h}{a \cdot H}$ bzw. $\frac{b'' \cdot h}{a'' \cdot H}$
$h$	Profilhöhe bei einfachen Profilen (cm) Abstand zwischen den Flanschen bei zusammengesetzten Profilen (cm) Segmenthöhe bei trapezförmlichen Profilen mit ausbuchtender Basis (cm)
$h/a$	Ausbuchtungsverhältnis bei trapezförmlichen Profilen mit ausbuchtender Basis
$h/H$	Aushöhlungshöhe bei zusammengesetzten Profilen
$\mu$	Höhe des Trapezelements bei einem trapezförmlichen Profil mit ausbuchtender Basis
$I$	Trägheitsmoment des inneren Kreises bei einem Rohrprofil, bzw. der negativen Profilfläche bei einem zusammengesetzten Profil (cm <sup>4</sup> )
$r$	Krümmungshalbmesser der Schwerpunktlinie (cm)
$r_1$	Krümmungshalbmesser der innersten Fasern (cm)
$r_2$	" " äußersten Fasern (cm)
$r_m$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$ = Krümmungshalbmesser der Fasern in der Mittellinie des Profils (cm)
$r_\mu$	Krümmungshalbmesser der Fasern in der horizontalen Mittellinie eines Profilelements (cm)
$\Delta r$	$r_\mu - r$ (cm)
$\Delta r_0$	Abstand zwischen der Mittellinie eines Trapezes und seiner Schwerpunktsachse. $\Delta r_0 = \Delta r$ für ein einfaches Trapez.
$s$	Stärke des inneren Flansches (cm)
$s_1$	Stärke des Stehblechs (cm)
$Z$	die Funktion $Z$ für die Innenfläche eines Rohrprofils bzw. die negative Fläche bei einem zusammengesetzten Profil
$\alpha$	der Formfaktor.
$\alpha'$	genäherter Formfaktor.
$\alpha''$	eine höhere Näherung von $\alpha$ .
$\beta$	Sicherheitskoeffizient nach Steinhardt
$\varphi$	Parameter für Trapeze, $= \frac{a-b}{a+b}$
$\kappa$	$\frac{Z}{I}$ , $\kappa' =$ Näherung von $\kappa$ , $\kappa'' =$ höhere Näherung von $\kappa$ .
$\Theta$	die Funktion $\kappa$ für die gesamte (positive) Fläche eines Rohrprofils bzw. zusammengesetzten Profils
$\theta$	die Funktion $\kappa$ für die entsprechende innere (negative) Fläche
$\sigma$	Spannung (at bzw. kp/cm <sup>2</sup> )

## ÜBER DIE EINSCHÄTZUNG VON BIEGESpannungen IN GEKRÜMMTEN BALKEN

Falls ein Balken in unbedeutendem Mass gekrümmt, d.h. das Verhältnis der Balkenhöhe zum innersten Krümmungshalbmesser  $h/r_1 \leq 0,1$  ist, kann die Biegespannung nach der üblichen, für gerade Balken gültigen Formel

$$\sigma = M/W \quad (1)$$

eingeschätzt werden, wo

$M$  = das Biegemoment,

$W$  = das Widerstandsmoment des Profils ist.

Liegt indessen eine schärfere Krümmung vor, so wird bekanntlicherweise die Spannung am Innenrand

$$\sigma_1 = \frac{M}{Ar} - \frac{M}{Z} e_1 \frac{r}{r_1} \quad (2)$$

und am Aussenrand

$$\sigma_2 = \frac{M}{Ar} + \frac{M}{Z} e_2 \frac{r}{r_2} \quad (3)$$

wo

$r$  = der Krümmungshalbmesser der Schwerpunktlinie,

$r_1, r_2$  = der Krümmungshalbmesser der innersten bzw. äussersten Fasern,

$e_1, e_2$  = der Abstand der Schwerpunktlinie von den innersten bzw. äussersten Fasern,

$M$  = das Biegemoment, positiv angesetzt, wenn es die Krümmung zu vermehren sucht, und

$A$  = die Querschnittsfläche ist.

Zugspannungen werden positiv, Druckspannungen negativ angesetzt.

$$Z = \int y^2 \frac{r}{r + y} dA \quad (4)$$

wo

$y$  = der Abstand von der Schwerpunktlinie, nach aussen positiv angesetzt, ist.

Die Formeln (2) und (3) sind an sich einfach, aber die darin erscheinende Funktion  $Z$  ist unbequem. Für komplizierte Profile lässt sie sich nur mittels graphischer Integration bestimmen (1, 2, 4 u.a.m.), während sie für einfachere Profile analytisch errechnet werden kann (1, 2, 3, 4 u.a.m.). Gewöhnlicherweise wird  $Z$  als Funktion des Trägheitsmoments  $I$  des Balkenprofils in bezug auf die zur Balkenebene senkrechte Schwerpunktsachse angeben, d.h.

$$Z = \kappa \cdot I \quad \text{bzw.} \quad \kappa = Z/I \quad (5)$$

wo  $\kappa$  eine dimensionslose, nur vom Profiltyp und vom Verhältnis  $e_1/r$  abhängige Konstante ist. Handbücher führen errechnete Tabellen bzw. Kurventafeln, nach denen der Wert von  $\kappa$  für gewisse einfache Profile bestimmt werden kann [1, 2, 3, 4]. Wenn kompliziertere Profile in Frage stehen, kann  $\kappa$  nach den Formeln von Luthander (3) berechnet werden, oder auch muss man  $Z$  graphisch ermitteln.

Die graphische Methode ist ungeheuer zeitraubend und sie sagt daher dem praktischen Konstrukteur weniger zu. Die von Professor Luthander aufgestellten Formeln zur Berechnung der Funktion  $\kappa$  für Profile, die sich aus reinen Rechteckelementen zusammensetzen, sind zweifellos elegant und theoretisch richtig (vgl. angefügte Beilage), doch sind auch sie mit einigen praktisch ins Gewicht fallenden Nachteilen behaftet. Einerseits muss man sich bei der Berechnung der Logarithmen bedienen, und dies sollte ja nach Möglichkeit vermieden werden; andererseits neigt das Resultat zu erheblicher Ungenauigkeit, indem es aus der Differenz zweier nahezu gleich grosser Ausdrücke hervorgeht. Hierdurch werden die prozentuellen Fehler auf das Zehn- bis Zwanzigfache gesteigert. Um zufriedenstellende Genauigkeit zu erzielen, dürfen daher die Logarithmenwerte nicht einfach am Rechenstab abgelesen werden; vielmehr muss man eine mehrstellige Logarithmentafel anwenden und die Rechnungen sollten mit der Rechenmaschine oder in zeitraubender Zifferrechnung erfolgen. Jedoch sollten praktische Festigkeitsberechnungen vorzugsweise mit dem Rechenstab allein ausführbar sein. In zahlreichen Fällen, z.B. beim Bemessen von Lagerdeckeln und Pleuelstangenbügeln, wird daher die Krümmung ausser Acht gelassen und die Berechnung wie für einen geraden Balken, jedoch mit geringerer zulässiger Spannung durchgeführt. Dies ist weniger befriedigend, indem dabei der Konstrukteur in Ungewissheit darüber verbleibt, ob die Teile zu schwach dimensioniert worden sind oder ob sie etwa ganz und gar zu kräftig ausfallen.

Die vorliegende Untersuchung hat den Zweck zu zeigen, dass man mittels einer ganz einfachen, in unbedeutendem Mass approximativen Formel die Beanspruchungen bei nahezu allen Profiltypen mit einer für gewöhnliche Festigkeitsberechnungen vollends befriedigenden Genauigkeit einschätzen kann.

In fast allen Fällen ergibt sich in den innersten Fasern eine weit höhere resultierende Spannung als in den äusseren, weshalb uns nur die erstgenannte interessiert. In allen derartigen Fällen ist es am bequemsten, die Biegespannung mit Hilfe des "Formfaktors" festzustellen.

Führt man den Ausdruck von  $Z$  nach Gl. (5) in Gleichung (2) ein und beachtet man, dass das entsprechende Widerstandsmoment  $W_1 = I/e_1$  ist, so hat man

$$\sigma_1 = \frac{M}{Ar} - \frac{M}{W_1 \kappa} \cdot \frac{r}{r_1} = - \frac{M}{W_1} \left( - \frac{W_1}{Ar} + \frac{1}{\kappa} \frac{r}{r_1} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_1 = - \frac{M}{W_1} \alpha \quad (7)$$

mit dem Formfaktor

$$\alpha = - \frac{W_1}{Ar} + \frac{1}{\kappa} \frac{r}{r_1} \quad (8)$$

Falls ausnahmsweise, z.B. bei "horizontal unsymmetrischen" Profilen, d.h. bei Profilen bei denen die zur Balkenebene senkrechte Schwerachse nicht mit der entsprechenden Mittellinie zusammenfällt, auch der Wert für die Spannung in den äussersten Fasern gewünscht wird, erhält man den zuständigen "äusseren Formfaktor" folgendermassen:

Bezeichnet man den für die Biegespannung in den innersten Fasern massgebenden Formfaktor und das zugeordnete Widerstandsmoment mit  $\alpha_1$  bzw.  $W_1$  und die entsprechenden Werte für die äussersten Fasern mit  $\alpha_2$  bzw.  $W_2$ , so findet man nach Gleichung (8)

$$\alpha_1 = - \frac{W_1}{Ar} + \frac{1}{\kappa} \frac{r}{r_1}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Gleichung (3)

$$\alpha_2 = - \frac{W_2}{Ar} + \frac{1}{\kappa} \frac{r}{r_2}$$

Eliminieren des Faktors  $1/\kappa$  und Auflösen nach  $\alpha_2$  liefert

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} + \frac{W_1}{A r_2} \cdot \frac{e_1 + e_2}{e_2} \quad \begin{array}{l} \text{da } r_1 = r - e_1 \\ r_2 = r + e_2 \end{array}$$

oder da  $e_1 + e_2 = h$  gleich der Profilhöhe ist,

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} + \frac{W_1}{A r_2} \cdot \frac{h}{e_2} = \alpha_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} + \frac{W_2}{A r_2} \cdot \frac{h}{e_1} \quad (9)$$

Die Biegespannung in den äussersten Fasern ergibt sich somit zu

$$\sigma_2 = \frac{M}{W_2} \cdot \alpha_2 = \frac{M}{W_2} \frac{r_1}{r_2} \cdot \alpha_1 + \frac{M}{A r_2} \cdot \frac{h}{e_1} \quad (10)$$

#### RECHTECKPROFILE

Für ein rechteckiges Profil mit der Höhe  $h$  ergibt sich für  $\kappa$  der Wert (2, 4)

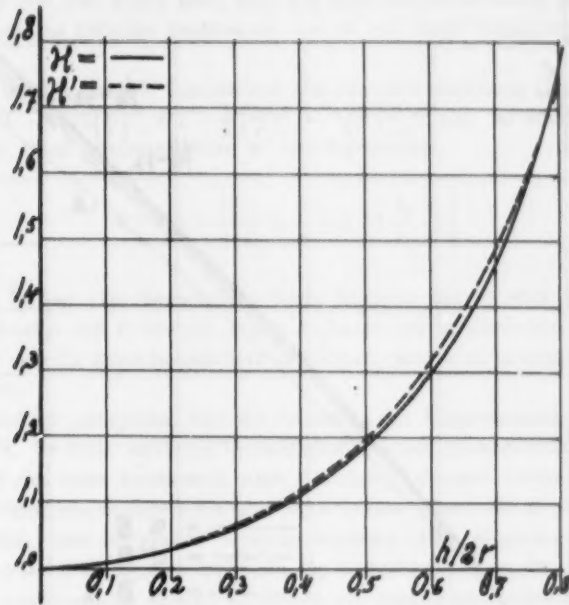
$$\kappa = 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left( \frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \quad \frac{h}{2r} < 1 \quad (11)$$

Die umständliche Reihenentwicklung kann ohne störenden Fehler durch die geometrische Reihe

$$\kappa' = 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 \right]^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r} \right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} \left( \frac{h}{r} \right)^2} \quad (12)$$

ersetzt werden.

Wenn man die nach der strengen Formel (11) berechneten Werte von  $\kappa$  und diejenigen von  $\kappa'$  nach Formel (12) als Funktionen von  $h/2r$  darstellt, zeigt es sich, dass die beiden Kurven nur in unbedeutendem Mass voneinander abweichen, insofern keine übertrieben scharfe Krümmung vorliegt. Bei ausserordentlich starker Krümmung verlieren indessen auch die Grundformeln selbst ihre Gültigkeit (6). Da sich die vorliegende Arbeit auf gekrümmte Balken bezieht, deren Krümmung den praktischen Festigkeitsuntersuchungen am üblichsten vorkommenden mässigen Werten, d.h. im Fall von Rechteckprofilen  $h/t_1 \leq 5$  bzw.  $h/2r \leq 0,7$  entspricht, können die nach Formel (12) errechneten Werte als anwendbar betrachtet werden.

Abb. 1.  $\alpha$  und  $\alpha'$  für Rechteckprofile.

Führen wir im Ausdruck (8) von  $\alpha$  anstelle des exakten Wertes  $1/\alpha$  den an Hand von Formel (12) berechneten Wert  $1/\alpha' = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{h}{r}\right)^2$  ein, so erhalten wir einen Näherungswert, den wir mit  $\alpha'$  bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{h}{6r} + \left[ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right] \cdot \frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_1} - \frac{h}{6r} - \frac{1}{6} \frac{h^2}{rr_1} = \\ &= 1 + \frac{h}{2r_1} - \frac{h}{6r} - \frac{1}{6} \frac{h}{r} \left[ 2 \frac{r}{r_1} - 2 \right] = 1 + \frac{1}{6} \left[ 3 \frac{h}{r_1} - \frac{h}{r} - 2 \frac{h}{r_1} + 2 \frac{h}{r} \right] \quad \text{oder} \\ \alpha' &= 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{h}{r_1} + \frac{h}{r} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Da für ein Rechteck  $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_m$ , gilt auch

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{h}{r_1} + \frac{h}{r_m} \right] \quad (14)$$

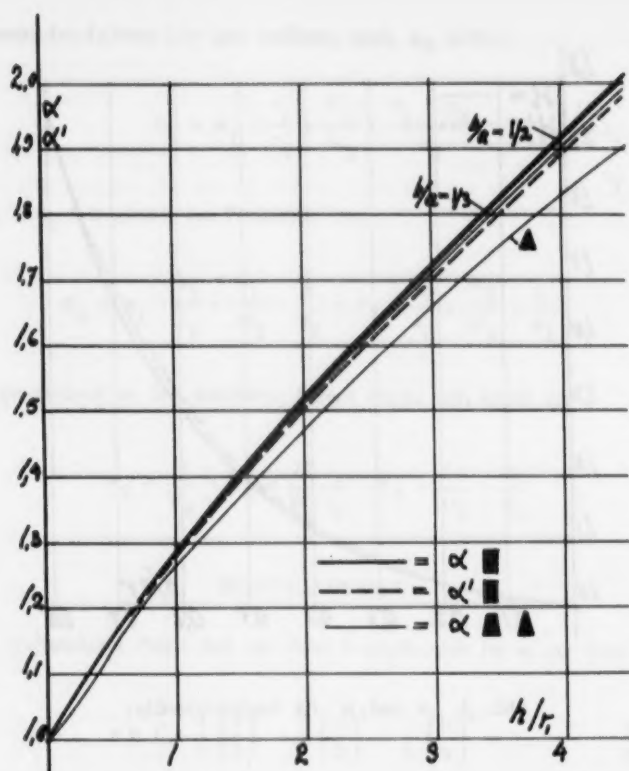


Abb. 2.  $\alpha$  für Rechtecke, Trapeze und Dreiecke.

In Abb. 2 wird ein Vergleich der nach der Näherungsformel (14) berechneten Werte von  $\alpha'$  mit den streng berechneten Werten  $\alpha$  vorgenommen. Hieraus geht hervor, dass der Fehler der Näherungsformel selbst bei sehr scharf gekrümmten Balken bedeutungslos ist.

Eine noch erheblich feinere Näherung erreicht man, wenn die unbequeme Reihe in Gleichung (11) durch folgende geometrische Reihe ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= 1 + 0,64 \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \left[ 0,64 \left( \frac{h}{2r} \right)^2 \right]^2 + \left[ 0,64 \left( \frac{h}{2r} \right)^2 \right]^4 + \dots = \frac{1}{1 - 0,64 \left( \frac{h}{2r} \right)^2} \\ &= \frac{1}{1 - 0,16 \left( \frac{h}{r} \right)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Bei Werten von  $h/2r \leq 0,7$  bzw.  $h/r_1 \leq 5$  wird der Fehler kaum grösser als der beim Anwenden des üblichen Rechenstabs von 25 cm Länge begangene Fehler ausfallen.

Führt man in Gleichung (8) anstelle von  $1/\alpha$  den nach Gleichung (15) berechneten Wert  $1/\alpha'' = 1 - 0,16\left(\frac{h}{r}\right)^2 = 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{0,04}{6}\left(\frac{h}{r}\right)^2$  ein, so erhält man für ein Rechteckprofil einen genaueren Wert  $\alpha''$  des Formfaktors:

$$\alpha'' = 1 + \frac{1}{6}\left[\frac{h}{r_1} + \frac{h}{r} + 0,04 \frac{h}{r_1} \frac{h}{r}\right] \quad (16)$$

Die nach Formel (16) berechneten Werte stimmen fast vollends mit den exakt bestimmten Werten von  $\alpha$  überein. Durch Auslassen des unbedeutenden Korrektionsgliedes ergibt sich die zuvor hergeleitete einfachere, jedoch etwas ungenauere Formel (13) bzw. (14).

Es ist allerdings zuzugeben, dass das Berechnen der Biegespannung mit Hilfe des Formfaktors  $\alpha'$  im Falle einfacher Rechteckprofile keine nennenswerte Zeitersparnis im Vergleich mit einer Berechnung nach Gleichung (4) unter Anwendung nach der Formel (15) errechneter bzw. Kurven entnommener Werte für  $\alpha$  ermöglicht. Es zeigt sich aber, dass der gleiche einfache Ausdruck (14), gegebenenfalls mit unbedeutender Vervollständigung, nicht nur für Rechtecke sondern für nahezu alle in der Praxis vorkommenden sowohl einfachen als zusammengesetzten Profile gültig ist. Beim Untersuchen solcher hat die Anwendung eines einfachen Ausdrucks für den Formfaktor eine bedeutende Zeitersparnis zur Folge; zugleich verringert sich die Gefahr, dass sich unbemerkt Rechenfehler einschleichen.

Beachtet man, dass in Formel (16) das Glied  $0,04 \frac{h}{r_1} \cdot \frac{h}{r} = 0,04 \frac{h}{r_1} \cdot 2 \frac{r-r_1}{r} = 0,08 \left[\frac{h}{r_1} - \frac{h}{r}\right]$  ist, so geht Gleichung (16) über in

$$\alpha'' = 1 + 0,18 \frac{h}{r_1} + 0,1533 \frac{h}{r} \quad (16a)$$

Die Berechnung von  $\alpha''$  nach Gleichung (16a) beansprucht nicht mehr Zeit als die Bestimmung von  $\alpha'$  nach Formel (14), während jedoch letztere Formel sehr viel leichter im Gedächtnis zu behalten ist. Da ferner Näherungsausdrücke gleichartigen Typs, wie bereits erwähnt, auch für zusammengesetzte Profile gelten, ist die Gleichung (14) als Prototyp gewählt worden.

#### BALKEN MIT KREISFÖRMIGEN ODER ELLIPTISCHEN QUERSCHNITT

Für ein kreisförmiges Profil mit dem Durchmesser  $d$  erhält die Funktion  $\alpha$  den Wert (vgl. 2, 4 u.a.m.)

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{5}{8}\left(\frac{d}{2r}\right)^4 + \frac{1}{2} \frac{5}{8} \frac{7}{10}\left(\frac{d}{2r}\right)^6 + \dots \frac{d}{2r} < 1 \quad (17)$$

Die Reihe kann näherungsweise durch eine geometrische Reihe mit der Summe

$$\kappa' = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2r} \right)^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2r} \right)^2 \right]^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^2} \quad (18)$$

ersetzt werden.

Der Fehler wird unbedeutend, wenn die Krümmung eine mässige ist. Ist  $d/r = 1$ , so beläuft sich der Fehler auf etwa 1/2 %; bei weniger scharfer Krümmung ist er prozentuell noch geringer. Da in der Regel die Krümmung runder Balken eine mässige ist, bei einem Kettenglied beispielsweise  $d/r \approx 1$ , dürfte die Formel (18) voll anwendbar sein. Einsetzen des Werts von  $\kappa'$  nach Gleichung (18) in Gleichung (8) ergibt

$$\alpha' = -\frac{d}{8r} + \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right] \frac{r}{r_1} \quad \text{und in ähnlicher Weise wie für die rechteckigen Profile}$$

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{8} \left[ 2 \frac{d}{r_1} + \frac{d}{r} \right] \quad (19)$$

Die Formel hat ähnliche Gestalt wie Gleichung (14). Da aber die Masse des Balkens auf die Mittellinie zu angehäuft ist, gestaltet sich der Einfluss des Mittelhalbmessers auf den Formfaktor geringer. Dies wird noch deutlicher ersichtlich, wenn man die Gleichung folgendermassen umformt:

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left[ 1,5 \frac{d}{r_1} + 0,75 \frac{d}{r} \right] = 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{2} \frac{d}{r_1} + \frac{3}{4} \frac{d}{r} \right] \quad (19a)$$

Eine noch feinere Näherung erlangt man, wenn man den Wert von  $\kappa$  durch folgende geometrische Reihe ersetzt:

$$\kappa'' = 1 + 0,52 \left( \frac{d}{2r} \right)^2 + \left[ 0,52 \left( \frac{d}{2r} \right)^2 \right]^2 + \dots = \frac{1}{1 - 0,13 \left( \frac{d}{r} \right)^2} \quad (20)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (8) hat man, da  $0,13 = \frac{1}{8} + 0,005$ ,

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -\frac{d}{8r} + \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^2 - 0,005 \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right] \frac{r}{r_1} = \\ &= 1 + \frac{1}{8} \left[ 2 \frac{d}{r_1} + \frac{d}{r} - 0,04 \frac{d}{r_1} \frac{d}{r} \right] = 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{2} \frac{d}{r_1} + \frac{3}{4} \frac{d}{r} - 0,03 \frac{d}{r_1} \frac{d}{r} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck entspricht dem zeitiger für Rechtecke hergeleiteten, Gleichung (16), aber das Korrektionsglied ist negativ. Wird dieses vernachlässigt, so geht der

Ausdruck in Gleichung (19) über. Genau wie bei den Rechteckprofilen kann man Gleichung (21) schreiben

$$\alpha'' = 1 + 0,24 \frac{d}{r_1} + 0,135 \frac{d}{r} \quad (21 \text{ a})$$

Die Formel zeichnet sich durch grössere Exaktheit als Gleichung (19) aus und sie ist bequem auszurechnen, dagegen aber nicht gleich leicht zu merken; sie eignet sich auch nicht als Prototype für Rohrprofile.

Sämtliche für Kreisprofile hergeleiteten Ausdrücke treffen auch bei Ellipsen zu, wenn  $d$  = die Ellipsenachse in der Balkenebene ist.

#### TRAPEZPROFILE

Für ein Trapez mit der inneren bzw. äusseren Basis  $a$  bzw.  $b$  sowie der Höhe  $h$  wird die Funktion  $Z$  zu (2; sowie angefügte Beilage)

$$Z = -r^2 h \frac{(a+b)}{2} - r^3 (a-b) + r^3 \left[ b + \frac{(a-b)(r+e_2)}{h} \right] \ln \frac{r+e_2}{r-e_1} \quad (22)$$

Bezeichnen wir den Mittelhalbmesser mit  $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ , so kann der logarithmische Ausdruck zu einer Reihe entwickelt werden, nämlich

$$\ln \frac{r+e_2}{r-e_1} = \ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_m + h/2}{r_m - h/2} = 2 \left[ \frac{h}{2r_m} + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^5 + \dots \right]$$

Um bei der Kalkulation höhere Genauigkeit zu erzielen, sollen aus dem Ausdruck von  $Z$  ein Paar grosse Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen weggeschafft werden. Wir schreiben

$$b + \frac{(a-b)(r+e_2)}{h} = b + \frac{(a-b)(r_m + h/2)}{h} = \frac{a+b}{2} + (a-b) \frac{r_m}{h}$$

Einführen dieses Ausdrucks in Formel (22) ergibt

$$Z = r^3 \left\{ \frac{a+b}{2} \left[ \frac{h}{r_m} - \frac{h}{r} \right] + \left[ \frac{a+b}{2} + (a-b) \frac{r_m}{h} \right] \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^4 + \dots \right] \right\}$$

Wir beachten ferner, dass

$$\frac{a+b}{2} \left[ \frac{h}{r_m} - \frac{h}{r} \right] = \frac{(a+b)h}{2} \left[ \frac{1}{r_m} - \frac{1}{r} \right] = \frac{(a+b)h}{2} \left[ \frac{r - r_m}{r r_m} \right] = - \frac{(a-b)}{12} \frac{h}{r} \frac{h}{r_m}$$

$$\text{da } r - r_m = -\Delta r = -\frac{h}{6} \cdot \left[ \frac{a-b}{a+b} \right].$$

Der Ausdruck von Z wird nun

(23)

$$Z = r^3 \left\{ - \frac{(a-b)}{12} \frac{h}{r} \frac{h}{r_m} + \left[ \frac{a+b}{2} + (a-b) \frac{r}{h} m \right] \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^4 + \dots \right] \right\}$$

Das Trägheitsmoment für ein Trapez ist

$$I = \frac{A h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2} = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a+b) h}{2}$$

Da  $\kappa = Z/I$ , hat man

$$\kappa = \frac{18 (a+b)^2}{a^2 + 4ab + b^2} \left( \frac{r}{h} \right)^2 \left\{ - \frac{1}{6} \frac{(a-b)}{(a+b)} \frac{h}{r_m} + \frac{r}{h} \left[ 1 + 2 \frac{(a-b)}{(a+b)} \frac{r}{h} m \right] \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^3 \cdot \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_m} \right)^4 + \dots \right] \right\} \quad (24)$$

$\frac{r_m}{h} = \frac{r}{h} + \frac{1}{6} \left( \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{r}{h} + \frac{1}{6} \left( \frac{1-b/a}{1+b/a} \right)$  ist ausschliesslich eine Funktion von  $r/h$  und  $b/a$ .

Ebenso erhält, dass alle übrigen in Gleichung (24) vorkommenden Faktoren und Glieder ausschliesslich Funktionen von  $r/h$  und  $b/a$  sind. Für ein Trapezprofil ist somit  $\kappa$  nur von dem Basisverhältnis  $b/a$  und von dem Krümmungsverhältnis  $h/r$  abhängig. Durch Einsetzen der berechneten Werte von  $\kappa$  in Gleichung (8) findet man, dass  $\alpha$  gleichfalls nur von diesen beiden Quotienten abhängig ist.

Wenn man errechnete Werte von  $\alpha$  durch Kurven nicht wie bisher üblich als Funktion von  $e_1/t$  sondern in Abhängigkeit von  $h/t_1$  darstellt, erhält man Abb. 2. In einem solchen Diagramm fallen die Kurven für Trapezprofile fast vollkommen mit denjenigen für ein Rechteckprofil zusammen. Da, wie zuvor nachgewiesen, der Formfaktor für ein Rechteck mit völlig befriedigender Genauigkeit nach Gleichung (14) bestimmt werden kann, folgt hieraus, dass der Formfaktor für sämtliche Trapezprofile unabhängig vom Basisverhältnis und ohne Interpolation mit völlig zufriedenstellender Genauigkeit nach dieser Formel bestimmt werden kann. Bei Werten  $b/a > 0,1$  ergibt sich sogar für ein Trapezprofil ein geringerer Fehler als für ein Rechteck; bei  $b/a = 0,1$  decken sich die Kurven für  $\alpha$  und  $\alpha'$  fast vollkommen, während bei niedrigeren Werten  $\alpha$  etwas kleiner als  $\alpha'$  wird. Selbst für reine Dreiecke kann die Formel noch angewandt werden, wie aus Abb. 2 hervorgeht, obwohl der Fehler dann erheblich grösser wird.

# TRAPEZÄHNLICHE PROFILE MIT GEKRÜMMTER BASIS

Trapezähnliche Profile kommen bei Lasthaken in Frage; zur Vermeidung von Schabung und übermäßiger Biegebeanspruchung des Tragseils oder Drahtseils muss aber die Profilbasis bauchige Form erhalten.

Um die äusserst zeitraubende graphische Berechnung der Beanspruchungen im Haken zu erübrigen, wird in Handbüchern empfohlen, dass man sich das tatsächliche Profil durch ein reines Trapez mit gleicher Höhe und gleichen Breiten wie das tatsächliche Profil ersetzt denkt. Bei einer solchen Berechnung werden indessen die Fehler ungebührlich hoch. Jedoch ist die Methode einfach und sie kann zur approximativen, vorbereitenden Schätzung der Dimensionen Anwendung finden, wobei aber die Resultate mittels exakterer Kalkulation berichtigt werden müssen. Diese Kontrollrechnung kann folgendermassen ausgeführt werden.

Nach der in angefügter Beilage angegebenen Methode sind die Werte der Funktion  $Z$  für trapezähnliche Profile mit gekrümmter innerer Basis bestimmt worden. Die Krümmung der äusseren Basis ist vernachlässigt worden, da dieselbe unbedeutend ist und den Wert der Funktion nicht nennenswert beeinflusst. Anschliessend sind für verschiedene Basisverhältnisse ( $b/a$ ), für verschiedene Ausbuchtungsverhältnisse ( $h/a$ ) der inneren Basis mit  $a$  = Basissehne und  $h$  = Segmenthöhe sowie für verschiedene Krümmungsverhältnisse ( $H/r_1$ ) mit  $H$  = gesamte Profilhöhe nach Gleichung (5) die Werte von  $\alpha$  und nach Gleichung (8) die entsprechenden Werte von  $\alpha'$  berechnet worden. Vgl. Abb. 3.

Es zeigt sich hierbei, dass in gleicher Weise wie bei reinen Trapezen das Basisverhältnis der in Lasthaken üblicherweise benutzten Profile keinen nennenswerten Einfluss auf den Wert von  $\alpha$  ausübt, dass sich dieser aber etwas erhöht, wenn die innere Basis ausbuchtet. Um unnötige Komplikation zu vermeiden, kann man annehmen, dass bei der gewöhnlicherweise vorkommenden, unbedeutenden Ausbuchtung die zeitigere, für Rechtecke und reine Trapeze gültige Formel (14) weiterhin Anwendung finden kann, insofern das Zusatzglied linear um den Betrag des Ausbuchtungsprozents vergrössert wird, d.h.

$$\alpha' = 1 + \frac{1+h/a}{6} \left( \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r_m} \right) \quad (25)$$

Hier ist  $r_m = (r_1 + r_2):2$ , d.h. der Krümmungshalbmesser der Fasern durch die Mittellinie des gesamten zur Balkenebene senkrechten Profils.

In Abb. 3 sind mit voll ausgezogenen Kurven streng berechnete Werte von  $\alpha$  sowie durch gestrichelte Kurven nach Formel (25) errechnete Werte von  $\alpha'$  angezeigt. Bei dem Ausbuchtungsverhältnis  $h/a = 0,3$  fallen die Kurven zusammen, während bei niedrigeren Werten der Ausbuchtung gleichermassen wie bei reinen Trapezen der Wert von  $\alpha'$  in unbedeutendem Masse niedriger als derjenige von  $\alpha$  ausfällt. Beim Berechnen der Werte, die den voll ausgezogenen Kurven zugrunde liegen wurde angenommen, dass das Basisverhältnis ungefähr dem in Lasthaken vorkommenden entspricht, d.h.  $0,25 < b/a < 0,6$ .

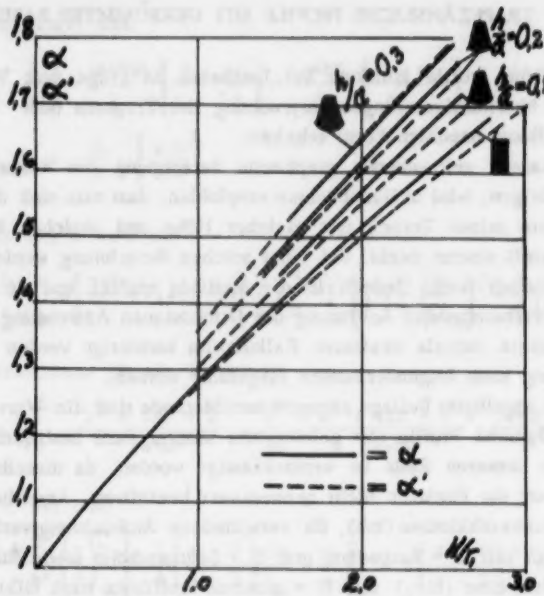


Abb. 3. Trapezähnliche Profile mit gekrümmter Basis.

## ANWENDUNG AUF EINEN LASTHAKEN

In Dubbels Handbuch I, S. 369, sind die Spannungen in einem Lasthaken von Normalausführung, für eine Last von 10 Ton beabsichtigt, graphisch berechnet. Die Dimensionen sind aus Abb. 4 ersichtlich. Die Berechnung liefert:

$$A = \text{Flächeninhalt des Profils} = 99,31 \text{ cm}^2$$

$$W_1 = I/e_1 = \frac{1214,5}{5,74} = 211,6 \text{ cm}^3$$

$$M = - 10^4 \cdot 11,74 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

$$\text{Nach Gleichung (25) findet man } \alpha' = 1 + \frac{1 + 1,23/11}{6} \left( \frac{13}{6} + \frac{13}{12,5} \right) = 1,595$$

Unter Beachtung der Zugspannung ergibt sich die Beanspruchung an den Innenrand zu

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} - \frac{M}{W_1} \alpha' = \frac{10^4}{99,31} + \frac{10^4 \cdot 11,74}{211,6} \cdot 1,595 = 100,7 + 885 = 985,7 \text{ kp/cm}^2 \quad (26)$$

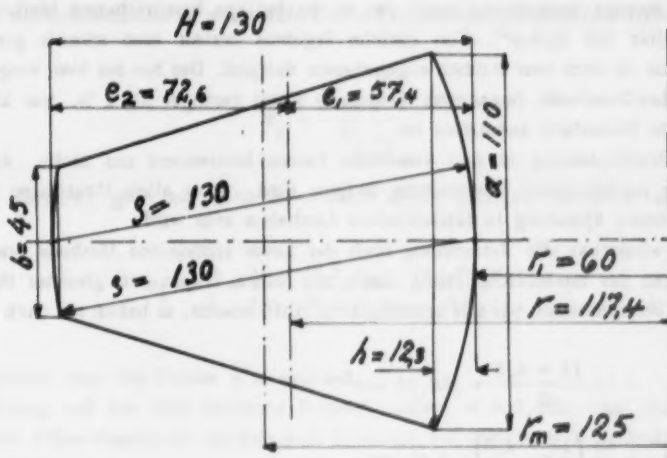


Abb. 4. Horizontalschnitt durch einen genormten Lasthaken.

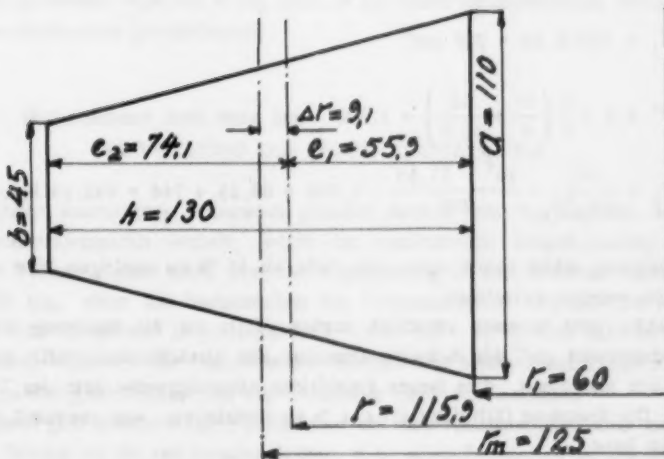


Abb. 5. Horizontalschnitt durch einen Lasthaken mit reinem Trapezprofil.

Eine Strenge Berechnung nach der in der Beilage beschriebenen Methode ergab das Resultat 995 kp/cm<sup>2</sup>. Das gleiche Ergebnis erzielt man mittels graphischer Integration in dem von Dubbel angegebenen Beispiel. Der bei der hier vorgeschlagenen Schnellmethode begangene Fehler ist somit geringer als 1 %, was als völlig genügende Sicherheit anzusehen ist.

Die Druckspannung in den äussersten Fasern interessiert uns nicht, da diese, wie eine nachfolgende Besprechung zeigen wird, unter allen Umständen geringer als die innere Spannung in tatsächlichen Lasthaken sein wird.

Wird wiederum die Berechnung nach der zuvor kritisierten Methode ausgeführt, indem man das tatsächliche Profil durch ein reines Trapez mit gleicher Höhe und gleichen Breitenmassen wie das ursprüngliche Profil ersetzt, so haben wir nach Abb. 5.

$$A = 13 \frac{11 + 4,5}{2} = 100,75 \text{ cm}^2$$

$$\Delta r = \frac{13}{6} \left( \frac{11 - 4,5}{11 + 4,5} \right) = 0,91 \text{ cm}$$

$$e_1 = 6,5 - 0,91 = 5,59 \text{ cm}$$

$$I = A \left( \frac{H^2}{12} - \Delta r^2 \right) = 100,75 \left( \frac{13^2}{12} - 0,91^2 \right) = 1337 \text{ cm}^4$$

$$W_1 = 1337/5,59 = 239 \text{ cm}^3$$

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{13}{6} + \frac{13}{12,5} \right) = 1,535 \quad \text{und nach dem Ausdruck (26)}$$

$$\sigma_1 = \frac{10^4}{100,75} + \frac{10^4 \cdot 11,59}{239} \cdot 1,535 = 99,25 + 744 = 843,25 \text{ kp/cm}^2$$

Die Spannung erhält somit einen um mehr als 15 % zu niedrigen Wert und die Methode ist weniger zuverlässig.

Der Fehler geht indessen erheblich zurück, falls wir die Rechnung mit dem Widerstandsmoment und der Schwerpunktsachse des tatsächlichen Profils ausführen und lediglich annehmen, dass dessen Formfaktor näherungsweise dem des Trapezes gleich ist. Die Spannung fällt dann etwa 4 % zu niedrig aus, was eventuell akzeptiert werden kann.

Wie zuvor angedeutet wurde, kann jedoch die Methode der Berechnung mit reinen Trapezprofilen zu einer vorbereitenden Schätzung des geeignetsten Verhältnisses der Profildimensionen benutzt werden, da das Berechnen des Flächeninhalts und des Widerstands- und Trägheitsmoments sowie die Bestimmung der Lage der Schwerpunktsachse für ein Trapez erheblich einfacher als für das tatsächliche Profil ist.

Restlos zufriedenstellend ist auch nicht die in Handbüchern empfohlene Näherungsformel

$$\sigma_1 = - \frac{M}{W_1} \frac{r}{r_1}$$

Dieser Ausdruck geht aus dem theoretisch streng gültigen für einen Lashaken

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} + \frac{M}{rA} - \frac{M}{\kappa} \frac{r}{r - e_1} = - \frac{M}{\kappa W_1} \frac{r}{r_1}$$

hervor, indem man den Faktor  $1/\kappa$  weglässt.

Anwendung auf das hier benutzte Beispiel liefert  $\kappa = 1,095$ , und der Fehler nach dieser Näherungsformel beläuft sich demnach auf nahezu 9 %, allerdings auf der sicheren Seite.

Eine nennenswerte Zeitersparnis bewirkt die Anwendung dieser scheinbar einfacheren Formel statt der von uns vorgeschlagenen exakteren (26) nicht, da sich auf jeden Fall der hauptsächlichliche Zeitaufwand aus der Bestimmung der Werte von  $r$  und  $W_1$  ergibt. Diese Bestimmungen sind recht beschwerlich für Trapeze mit bauchigen Basen, während das Errechnen von  $\sigma'$  ganz einfach vor sich geht und einen weit genaueren Wert von  $\sigma$  bei allen in der Praxis vorkommenden Krümmungs- und Basisverhältnissen gewährleistet.

#### BESPRECHUNG DES REINEN TRAPEZPROFILS

Bei einem aussermittigt belasteten geraden Balken mit Trapezprofil wird die grösste Materialersparnis erzielt, wenn die resultierende Druckspannung in den äussersten Fasern gleich hoch wie die Zugspannung in den innersten Fasern wird. Dies trifft ein, wenn die Basistrecken des Trapezes ihrem Abstand vom Angriffspunkt der Kraft umgekehrt proportional sind, d.h.  $b/a = r_1/r_2$ . Der Satz ist einfach zu beweisen, wenn wir die Ausdrücke der Absolutwerte beider resultierenden Spannungen einander gleichsetzen und die Gleichung nach  $b/a$  auflösen.

Bei einem gekrümmten Balken erhöht sich die Innenrandspannung, aber nach dem gleichen Prinzip wie für den geraden Balken, d.h. durch Feststellen der resultierenden Spannungen in den äussersten und innersten Fasern, können wir untersuchen, unter welchen Bedingungen diese gleiche Höhe haben.

Am Innenrand beträgt die resultierende Zugspannung nach Gleichung (26)

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} + \frac{P}{W_1} \frac{r}{r_1} \cdot \alpha_1$$

In ähnlicher Weise erhält man die resultierende Druckspannung am Aussenrand durch Anwendung der Gleichung (10):

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} - \frac{Pr}{W_2} \alpha_2 = \frac{P}{A} - \frac{Pr}{W_2} \frac{r_1}{r_2} \alpha_1 - \frac{P}{A} \frac{r}{r_2} \epsilon_1$$

Da im vorliegenden Fall das Trapez ein Profil mit ausbuchtenden Basistrecken und mit der Höhe  $H$  ersetzt, ist die gleiche Bezeichnung auch für die Trapezhöhe anzuwenden.

Wenn die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  gleich hoch sind, aber entgegengesetztes Zeichen haben, muss deren Summe Null sein, d.h.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2 \frac{P}{A} + \frac{Pr}{W_1} \left( 1 - \frac{W_1 r_1}{W_2 r_2} \right) \alpha_1 - \frac{Pr}{Ar_2} \cdot \frac{H}{\epsilon_1} = 0 \quad (27)$$

Bei einem Trapez sind sämtliche Kennwerte vom Parameter

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-b/a}{1+b/a} = \varphi$$

abhängig:

$$W_1 = \frac{AH}{6} \left( \frac{1 - \varphi^2/3}{1 - \varphi/3} \right) \quad W_2 = \frac{AH}{6} \left( \frac{1 - \varphi^2/3}{1 + \varphi/3} \right)$$

$$\epsilon_1 = \frac{H}{2} (1 - \varphi/3) \quad r = r_1 + \frac{H}{2} (1 - \varphi/3)$$

Einsetzen dieser Werte in Gleichung (27) führt diese über in

$$\begin{aligned} & \frac{P}{A} \left\{ \frac{6 \alpha_1 (1 - \varphi/3) \left[ r_1 + \frac{H}{2} (1 - \varphi/3) \right] \left[ 1 - \left( \frac{1 + \varphi/3}{1 - \varphi/3} \right) \frac{r_1}{r_2} \right]}{H (1 - \varphi^2/3)} + 2 \cdot \frac{\left[ r_1 + \frac{H}{2} (1 - \varphi/3) \right] H}{r_2 \cdot \frac{H}{2} (1 - \varphi/3)} \right\} \\ &= \frac{P}{A} \left\{ \frac{6 \alpha_1 (1 - \varphi/3) \left[ \frac{r_1}{H} + \frac{1}{2} (1 - \varphi/3) \right] \left[ 1 - \left( \frac{1 + \varphi/3}{1 - \varphi/3} \right) \frac{r_1}{r_2} \right]}{1 - \varphi^2/3} + 2 \cdot \frac{2r_1 + H (1 - \varphi/3)}{r_2 (1 - \varphi/3)} \right\} = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

Die Gleichung wird kubisch in bezug auf  $\varphi$ , aber eine singuläre Wurzel ist leicht erhältlich. Die zwei letzten Glieder im Klammerausdruck kann man schreiben

$$2 \cdot \frac{2r_1 + (r_2 - r_1) (1 - \varphi/3)}{r_2 (1 - \varphi/3)} = 1 - \frac{r_1}{r_2} \frac{(1 + \varphi/3)}{(1 - \varphi/3)}$$

Da  $0 \leq \varphi \leq 1$ , ist der erste Faktor im Klammerausdruck endlich und die Gleichung (28) wird somit befriedigt, wenn

$$1 - \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{1 + \varphi/3}{1 - \varphi/3} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad (29)$$

$$\varphi = 3 \frac{1 - r_1/r_2}{1 + r_1/r_2} = \frac{1 - b/a}{1 + b/a} \quad \text{woraus}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2r_1 - r_2}{2r_2 - r_1} = \frac{r_1 - H}{r_1 + 2H} = \frac{1 - H/t_1}{1 + 2H/t_1} = \frac{2 - r_2/t_1}{2r_2/t_1 - 1} \quad (30)$$

Ist  $H/t_1 > 1$ , so wird der Ausdruck negativ, und dies ist unmöglich. Gleiche Spannung in der äussersten und innersten Faser kann also nur dann erreicht werden, wenn das Krümmungsverhältnis  $H/t_1 \leq 1$  oder  $r_2/t_1 \leq 2$  ist, was gewöhnlicherweise bei Lasthaken nicht zutrifft. Nur bei weniger stark belasteten Haken kann dies der Fall sein. Geht man von angenommenem  $H/t_1$  aus, so lässt sich das Basisverhältnis nach Gleichung (30) berechnen, oder auch nimmt man ein gewisses Basisverhältnis  $b/a$  an und erhält dann das Krümmungsverhältnis mittels Gleichung (30), die nach  $H/t_1$  aufgelöst folgende Gestalt hat:

$$H/t_1 = \frac{1 - b/a}{1 + 2 b/a} \quad (30 a)$$

Gleichung (30) bzw. (30 a) entspricht der für gerade Balken gültigen Regel, dass die Basisstrecken ihren Abständen vom Kraftangriffspunkt umgekehrt proportional sein sollen.

Mit Kenntnis des Wertes  $2r_1$ , der Last  $P$  und der zulässigen Spannung  $\sigma$ , die gegebenenweise bei der vorbereitenden Betrachtung etwas niedriger als für das endgültige, ausbuchtende Profil gewählt wird, ergibt sich der Wert von  $A$  aus Gleichung (26) oder

$$A = \frac{P}{\sigma} \left[ 1 + \frac{rA}{W_1} \alpha \right] = \frac{P}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{6\alpha(1 - \varphi/3) \left[ \frac{r_1}{H} + \frac{1}{2}(1 - \varphi/3) \right]}{1 - \varphi^2/3} \right\} \quad (31)$$

Setzen wir anstelle von  $\alpha$  den Wert  $\alpha'$  nach Gleichung (14) ein, so erhalten wir

$$A = \frac{P}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{6(1 - \varphi/3) \left[ \frac{r_1}{H} + \frac{1}{2}(1 - \varphi/3) \right]}{1 - \varphi^2/3} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r_m} \right) \right] \right\} \quad (32)$$

Mit Kenntnis von  $A$  findet man, da  $\frac{a+b}{2} \cdot H = \frac{1+b/a}{2} \cdot H a = A$ ,

$$a = \frac{2A}{(1+b/a)H} \quad \text{und} \quad b = a(b/a)$$

Selbstverständlich stellen die errechneten Werte reine Idealwerte dar, die unter Beachtung praktischer Gesichtspunkte justiert werden müssen.

Für einen wirklichen Lasthaken muss man im allgemeinen  $H/r_1 > 1$  wählen. Da die Spannung am Aussenrande somit stets niedriger als diejenige am Innenrande ist, kann erstere ausser Acht gelassen und die günstigste Form ausschliesslich mit Hilfe der Gleichung (31) bestimmt werden. Für einen angenommenen Wert von  $H$  bzw.  $H/r_1$  und eine gegebene zulässige Spannung  $\sigma$  ermittelt man die am meisten materialsparende Profilform durch eine einfache Minimalbestimmung mittels Ableiten. Der Ausdruck (31) lässt sich umformen in

$$A = \frac{P}{\sigma} \left\{ 1 + \alpha \left[ \frac{\varphi^2 - 6\varphi(1 + r_1/H) + 9(1 + 2r_1/H)}{3 - \varphi^2} \right] \right\}$$

Da  $\alpha$ , wie bereits zuvor gezeigt wurde, bei Trapezprofilen für einen gegebenen Wert von  $H/r_1$  als praktisch konstant angesehen werden kann, hat für eine gegebene Last  $P$  und zulässige Spannung sowie für einen angenommenen Wert von  $r_1/H$  die Ableitung  $dA/d\varphi$  folgenden Wert, den man gleich Null setzt:

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{P\alpha}{\sigma} \left\{ \frac{(3 - \varphi^2) \left[ 2\varphi - 6\left(1 + \frac{r_1}{H}\right) \right] + 2\varphi \left[ \varphi^2 - 6\varphi\left(1 + \frac{r_1}{H}\right) + 9\left(1 + 2\frac{r_1}{H}\right) \right]}{(3 - \varphi^2)^2} \right\} = 0$$

Die Glieder dritten Grades im Zähler heben sich auf; folglich lässt sich die Gleichung leicht lösen und man hat

$$\varphi = \frac{2 + 3r_1/H}{1 + r_1/H} - \sqrt{\left[ \frac{2 + 3r_1/H}{1 + r_1/H} \right]^2 - 3} \quad (33)$$

Da  $\varphi$  stets kleiner als 1 ist, kommt nur die negative Wurzel in Frage.

Berechnet man den Minimumwert von  $A$  für verschiedene Krümmungsverhältnisse  $H/r_1$ , so erweist es sich, dass dieser mit steigendem Verhältnis  $H/r_1$  etwas abnimmt. Indessen zeigt Ausrechnen der Dimensionen  $a$  und  $b$ , dass bei Wahl eines hohen Wertes  $H/r_1$  das Profil übertrieben schlank und daher in seitlicher Richtung unzulänglich steif wird; ferner wird die Anlagefläche für das Drahtseil zu gering. In praktischen Anwendungsfällen hält man sich daher am liebsten unterhalb  $H/r_1 = 2,5$ .

Für  $A_{\min}$  ergibt sich desweiteren eine recht stark zugespitzte Form des Trapezes, und dies ist mit Rücksicht auf die Herstellung weniger wünschenswert. Deshalb wählt man üblicherweise einen etwas höheren Wert  $b/a$ , z.B.  $b/a = 1/3$ . Einsetzen in Gleichung (32) lässt erkennen, dass der Flächeninhalt des Profils hierdurch nur eine unbedeutende Vermehrung vom kleinsten möglichen Wert erfährt.

Selbstverständlich muss das Resultat unter Beachtung des tatsächlichen Profils mit abgerundeten Basisstrecken justiert werden.

## ROHRFÖRMIGE PROFILE

Es bezeichne:

- D bzw.  $I$  = den Aussendurchmesser des ringförmigen Profils bzw. das entsprechende Trägheitsmoment,  
 d bzw.  $i$  = den Innendurchmesser des ringförmigen Profils bzw. das entsprechende Trägheitsmoment,  
 $Z$  =  $\theta \cdot I$ , mit  $\theta$  = dem nach Gleichung (17) berechneten  $\kappa$ -Wert für ein kompaktes Kreisprofil vom Durchmesser D und mit dem Krümmungshalbmesser  $r$  der Schwerpunktlinie,  
 $z$  =  $\phi \cdot i$ , mit  $\phi$  = dem entsprechenden  $\kappa$ -Wert für den inneren Begrenzungskreis.

Der  $\kappa$ -Wert für den Kreisring ergibt sich zu

$$\kappa = \frac{Z - z}{I - i} = \frac{\theta I - \phi i}{I - i} = \theta + (\theta - \phi) \frac{i}{I - i} = \theta + (\theta - \phi) \frac{(d/D)^4}{1 - (d/D)^4} \quad (34)$$

Errechnen der Werte von  $\kappa$  zeigt, dass diese nicht nennenswert von den entsprechenden Werten für kompakte Profile abweichen, insofern die Krümmung des Balkens nicht übermäßig stark und zugleich die Wanddicke sehr unbedeutend ist. Unter den erwähnten Voraussetzungen kann man daher mit hinreichender Genauigkeit die für kompakte Kreisprofile hergeleiteten Werte von  $\kappa$  benutzen.

Wird im Ausdruck (8) des Formfaktors anstelle von  $\kappa$  der nach Gleichung (18) berechnete Näherungswert  $\kappa'$  eingesetzt, so erhält man einen Näherungswert für  $\alpha$ , den wir mit  $\alpha'$  bezeichnen wollen, und zwar findet man für diesen, wenn man beachtet, dass für eine Kreisringfläche  $W_1 = W_2 = \frac{\Delta \cdot D}{8} \{1 + (d/D)^2\}$  ist,

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{D}{8r} [1 + (d/D)^2] + \left[1 - \frac{1}{8}(D/r)^2\right] \frac{r}{r_1} = \\ &= -\frac{D}{8r} [1 + (d/D)^2] + \frac{r}{r_1} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{r r_1} = \\ &= -\frac{D}{8r} [1 + (d/D)^2] + 1 + \frac{D}{2r_1} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{r r_1} = \\ &= 1 + \frac{D}{8r_1} \left\{4 - \frac{r_1}{r} [1 + (d/D)^2] - 2(1 - r_1/r)\right\} \quad \text{oder} \\ \alpha' &= 1 + \frac{1}{8} \left\{2 \frac{D}{r_1} + \frac{D}{r} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]\right\} \quad (35) \end{aligned}$$

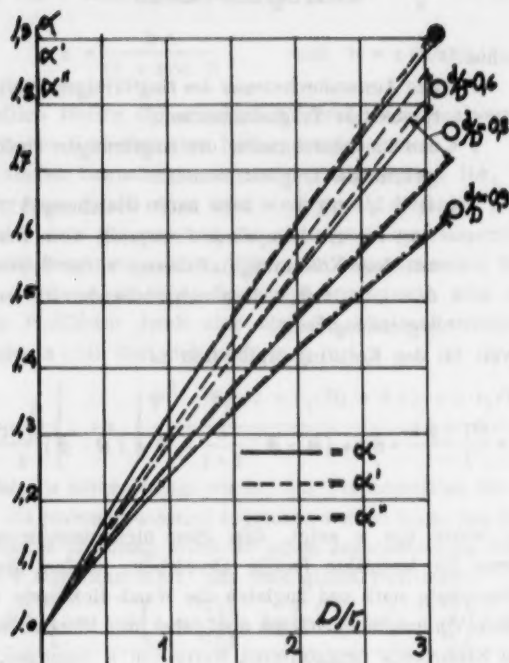


Abb. 6.  $\alpha$ ,  $\alpha'$  und  $\alpha''$  für Kreis- und Kreisringprofile.

Der Formfaktor  $\alpha'$  für ein Rohrprofil ist also im übrigen der gleiche wie für ein kompaktes Kreisprofil, nur ist das zweite Glied im Klammerausdruck mit dem Völligkeitsfaktor  $1 - (d/D)^2$  des Profils zu multiplizieren.

In Abb. 6 sind nach Gleichung (35) berechnete Werte von  $\alpha'$  in Abhängigkeit von  $D/r_1$  dargestellt (gestrichelte Kurven) und den nach Gleichung (8) und (34) bestimmten exakten Werten  $\alpha$  gegenübergestellt (voll ausgezogene Kurven). Man ersieht aus der Abbildung, dass die Übereinstimmung für stärkere Rohre eine leidlich gute ist, wenn die Krümmung nicht übermäßig scharf ist.

Eine quantitative Schätzung des Fehlers, der begangen wird, wenn man den Wert von  $\alpha$  für ein Ringprofil gleich dem für ein kompaktes Kreisprofil annimmt, ergibt sich aus Gleichung (34), die in folgende Form gebracht wird:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\Theta} \left[ \frac{1 - (d/D)^4}{1 - \frac{\Theta}{D} d} \right] \quad (36)$$

Einsetzen laut der strengeren Formel (20)

$$\Theta \approx \frac{1}{1 - 0,13 (D/h)^2} \quad \theta \approx \frac{1}{1 - 0,13 (d/h)^2}$$

$$\frac{\theta}{\Theta} \approx \frac{1 - 0,13 (D/h)^2}{1 - 0,13 (d/h)^2} \quad \text{liefert}$$

$$\frac{1}{\pi''} = \frac{[1 - 0,13 (D/h)^2] [1 - (d/D)^4]}{1 - \frac{[1 - 0,13 (D/h)^2]}{[1 - 0,13 (d/h)^2]} (d/D)^4} = 1 - 0,13 \left(\frac{D}{r}\right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{d}{D}\right)^4 \frac{[1 - 0,13 \left(\frac{D}{r}\right)^2]}{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 [1 - 0,13 \left(\frac{D}{r}\right)^2]} \right\}$$

Da  $0,13 = \frac{1,04}{8}$ , kann man diesen Ausdruck schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi''} &= 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{D}{r}\right)^2 \left\{ 1 + 1,04 \left(\frac{d}{D}\right)^4 \frac{[1 - 0,13 \left(\frac{D}{r}\right)^2]}{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 [1 - 0,13 \left(\frac{D}{r}\right)^2]} + 0,04 \right\} = \\ &= 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{D}{r}\right)^2 (1 + K) \end{aligned} \quad (37)$$

worin

$$K = 1,04 (d/D)^4 \frac{[1 - 0,13 (D/h)^2]}{1 + (d/D)^2 [1 - 0,13 (D/h)^2]} + 0,04 \quad (38)$$

Setzt man den Ausdruck von  $1/\pi''$  in Gleichung (8) des Formfaktors ein, so erhält man

$$\alpha'' = -\frac{D}{8r} [1 + (d/D)^2] + \left[ 1 - \frac{1}{8} (D/h)^2 (1 + K) \right] \frac{r}{r_1}$$

In ähnlicher Weise wie zuvor beim Herleiten der Gleichung (35) findet man

$$\alpha'' = 1 + \frac{1}{8} \left\{ 2 \frac{D}{r_1} + \frac{D}{r} [1 - (d/D)^2] - \frac{D}{r} \frac{D}{r_1} \cdot K \right\} \quad (39)$$

Die Formel ist genau, aber vermöge ihrer Umständlichkeit unanwendbar. Berechnet man jedoch die Korrektionsglieder für verschiedene Werte von  $D/r_1$  und  $d/D$  und trägt diese als Ordinaten in einem orthogonalen Koordinatensystem über den Abszissen  $\frac{D}{r} \cdot \frac{D}{r_1} (d/D)^4$  ein, so liegen die Bildpunkte ungefähr auf einer durch den Ursprung gehenden, geraden Linie und das Korrektionsglied kann demnach als

proportional dem Ausdruck  $\frac{D}{r_1} \frac{D}{r} \left(\frac{d}{D}\right)^4$  angesehen werden. Gleichung (39) geht dann über in die Form

$$\alpha'' \approx 1 + \frac{1}{8} \left\{ 2 \frac{D}{r_1} + \frac{D}{r} \left[ 1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] - 0,6 \frac{D}{r_1} \frac{D}{r} \left(\frac{d}{D}\right)^4 \right\} \quad (40)$$

Lässt man hier das letzte Glied aus, so findet man den zeitiger hergeleiteten Näherungsausdruck (35) wieder.

Nach Formel (40) berechnete Werte  $\alpha''$  sind in Abb. 6 durch strichpunktierte Kurven wiedergegeben. Man sieht, dass diese Kurven fast vollends mit den nach Gleichung (8) und (34) berechneten zusammenfallen. Dem Fehler der Näherungsformel (35) entspricht somit das Glied  $\frac{0,6}{8} \frac{D}{r_1} \frac{D}{r} \left(\frac{d}{D}\right)^4$ , dessen Wert bei stärkeren Rohren und mässiger Krümmung prozentuell unbedeutend wird.

Bei dünneren Rohren dagegen verlieren die Grundformeln selbst ihre Gültigkeit, da das Profil bei der Biegung deformiert wird. Die Durchbiegung solcher beispielsweise als Ausgleichstücke benutzten, dünnwandigen gewalzten Stahlrohre kann näherungsweise nach den Formeln v. Karmanns (5) berechnet werden; spätere Untersuchungen haben indessen gezeigt, dass seine Formeln zur Berechnung der Beanspruchungen unanwendbar sind, indem das Spannungsbild durch die Verformung des Profils eine radikale Veränderung erfährt. Während die maximale Spannung sich bei stärkeren Rohren in den Innenrandfasern einstellt, hat die Zusammendrückung des Profils die Entstehung sekundärer Biegespannungen in der scheinbar neutralen Schicht des Profils zur Folge; diese Spannungen können die primären Biegespannungen beträchtlich überschreiten und müssen daher der Festigkeitsberechnung zugrunde gelegt werden. Auch diese Beanspruchungen können mittels eines Formfaktors erfasst werden, den wir der Einfachheit halber weiterhin mit  $\alpha$  bezeichnen wollen, obwohl es sich nicht mehr um primäre Biegespannungen handelt. Wir finden

$$\sigma_{\max} = \alpha \frac{M}{W_1}$$

worin  $\alpha$  von  $d/D$  und  $D/r_1$  abhängig ist, wenngleich in derart komplizierter Weise, dass die Werte vorzugsweise aus einem Kurvenblatt ermittelt werden. Ein solches hat Professor ten Bosch (4) angegeben, und der Verfasser hat es für die in der vorliegenden Arbeit angewandte Bezeichnungsweise umgerechnet (Abb. 7). Ein Vergleich der nach Formel (35) berechneten Werte, die auf dem Kurvenblatt mit eingetragen sind (gestrichelte Kurven) mit den voll ausgezogenen, experimentell verifizierten Kurven lässt feststellen, dass die Formel (35) sogar für stark gekrümmte Rohre anwendbar ist, wenn die Wandstärke  $s$  mindestens 20 % des Aussendurchmessers beträgt, d.h.  $d/D \leq 0,6$  ist; für dünnwandigere Rohre mit  $s/D = 0,15$  oder  $d/D \leq 0,7$  ist sie nur bis  $D/r_1 = 1$  und im Fall  $d/D = 0,8$  nur bis  $D/r_1 = 0,5$  brauchbar. Für dünnwandige Rohre sollte der Wert von  $\alpha$  am liebsten dem Diagramm entnommen werden.

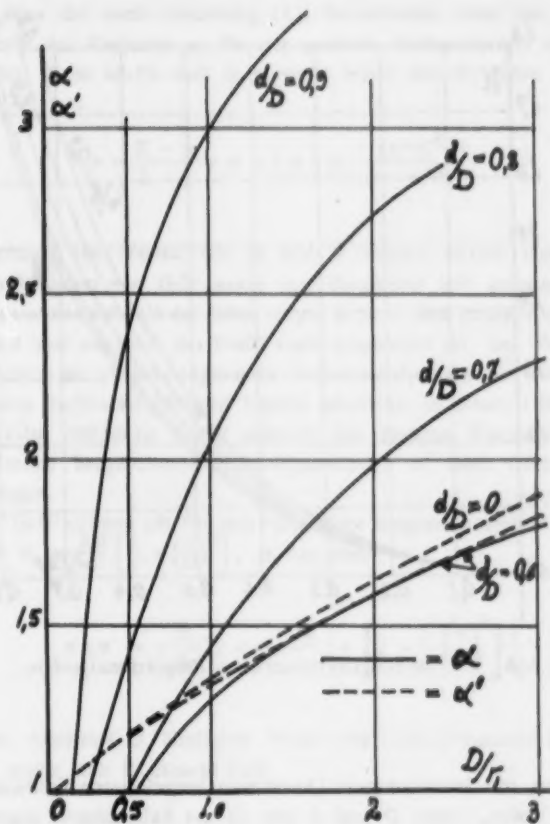


Abb. 7. Der Formfaktor für die Sekundärspannung in dünnwandigen Rohren.

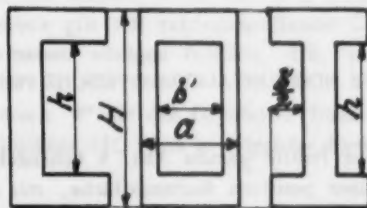


Abb. 8. Horizontalsymmetrische zusammengesetzte Proportionalprofile.

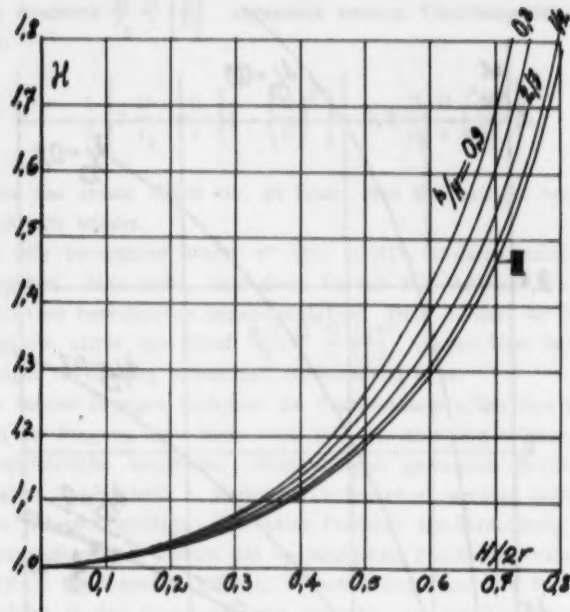


Abb. 9. Horizontalsymmetrische Proportionalprofile.

Die für Rohre mit kreisförmigem Querschnitt hergeleiteten Formeln gelten auch für elliptische Rohre, wenn  $D$  und  $d$  den in der Balkenebene liegenden Aussen- bzw. Innendurchmesser bezeichnen und die Halbachsen der äusseren und inneren Ellipse einander verhältnissgleich sind. Auch für elliptische Rohre mit konstanter Wandstärke können die Formeln angewandt werden, falls das Rohrprofil nicht stark zusammengedrückt ist.

#### ZUSAMMENGESETZTE HORIZONTALSYMMETRISCHE PROPORTIONALPROFILE

Horizontalsymmetrische Profile gemäss Abb. 8 behandelt man, indem sie als zusammengesetzt aus einer positiven Rechteckfläche, mit der Basis  $a$  gleich der Gesamtbreite und mit der Höhe  $H$  gleich der Gesamthöhe, sowie einer negativen solchen mit der Basis  $b'$  und der Höhe  $h$  betrachtet. Beide Rechtecke haben die gleiche horizontale Symmetrielinie. Für Proportionalprofile gilt ferner  $b'/a = h/H$ .

Bezeichnet man die nach Gleichung (11) berechneten oder der Abb. 1 entnommenen Werte der Funktion  $\kappa$  für das positive Rechteckprofil mit  $\Theta$  und für das negative mit  $\bar{\Theta}$ , so erhält man in gleicher Weise wie für Rohre

$$\kappa = \frac{Z - z}{1 - 1} = \Theta + (\Theta - \bar{\Theta}) \frac{(h/H)^4}{1 - (h/H)^4} \quad (41)$$

Durch Berechnen von Werten von  $\Theta$  und  $\bar{\Theta}$  wurden exakte Werte von  $\kappa$  ermittelt und als Funktion von  $H/2r$  sowie vom Parameter  $h/H$  graphisch dargestellt (Abb. 9). Genau so wie im Fall der Rohre zeigte es sich, dass insofern die Krümmung nicht sehr scharf und zugleich das Profil stark ausgehöhlt ist, der Wert von  $\kappa$  für horizontalsymmetrische zusammengesetzte Proportionalprofile nur unwesentlich von den für kompakte Rechtecke gültigen Werten abweicht. In diesen Fällen kann man deshalb ohne allzu störenden Fehler anstelle des exakten Wertes von  $\kappa$  den für einfache Rechtecke hergeleiteten Näherungsausdruck  $\kappa'$  nach Gleichung (12) in Anwendung bringen.

Wird dieser in Gleichung (8) für den Formfaktor eingesetzt und in Rücksicht genommen, dass  $W_1 = \frac{\Delta H}{6} \left\{ 1 + \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right\}$ , so hat man

$$\alpha \approx \alpha' = -\frac{H}{6r} \left[ 1 + (h/H)^2 \right] + \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r} \right)^2 \right] \frac{r}{r_1}$$

Wenn dieser Ausdruck in ähnlicher Weise wie beim Behandeln der Rohre entwickelt wird, ergibt sich in diesem Fall

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right] \right\} \quad (42)$$

worin  $r = r_m$  ist. Die Formel entspricht Gleichung (13) bzw. (14) für einfache Rechteckprofile, nur ist das letztere Glied mit dem Völligkeitsfaktor des Profils multipliziert. Der Ausdruck gilt mit zufriedenstellender Genauigkeit bei mässiger Krümmung und einigermaßen völligen Profilen, d.h. wenn der Völligkeitsgrad  $f = 1 - (h/H)^2 \gtrsim 0,5$  ist.

Einen exakteren Ausdruck  $\alpha''$  für den Formfaktor findet man in gleicher Weise wie bei den Rohren. Gleichung (41) kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\Theta} \left[ \frac{1 - (h/H)^4}{1 - \frac{\bar{\Theta}}{\Theta} \left( \frac{h}{H} \right)^4} \right] \quad (43)$$

Setzt man in diesem Fall laut der strengeren Formel (15) ein

$$\frac{1}{\theta} = 1 - 0,16 (H/h)^2 \quad \frac{1}{\theta} = 1 - 0,16 (h/h)^2$$

$$\frac{\theta}{\theta} = \frac{1 - 0,16 (H/h)^2}{1 - 0,16 (h/h)^2} \quad \text{so erhält man}$$

$$\frac{1}{x''} = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r} \right)^2 (1 + K) \quad (44)$$

wo nun K folgenden Wert hat:

$$K = 0,96 \left( \frac{h}{H} \right)^4 \frac{[1 - 0,16 (H/h)^2]}{1 + (h/H)^2 [1 - 0,16 (H/h)^2]} - 0,04 \quad (45)$$

Der entsprechende Ausdruck für den Formfaktor ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (8) von

$$\alpha'' = - \frac{H}{6r} [1 + (h/H)^2] + \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r} \right)^2 (1 + K) \right] \frac{r}{r_1}$$

Wenn man den Ausdruck ebenso wie zuvor umgestaltet, erhält man

$$\alpha'' = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} [1 - (h/H)^2] - \frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \cdot K \right\} \quad (46)$$

Die Formel ist entschieden allzu kompliziert, doch kann sie nach dem gleichen Prinzip wie die entsprechende Formel für die Rohrprofile vereinfacht werden. Werden Werte des Korrektionsglieds für verschiedene in der Praxis vorkommende Krümmungs- und Volligkeitsverhältnisse berechnet und in einem orthogonalen Koordinatensystem gegen das Produkt  $\frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \left( \frac{h}{H} \right)^4$  aufgetragen, so sieht man, dass die Punkte nahezu exakt auf eine durch den Ursprung gehende gerade Linie fallen. Da es sich um ein geringes Korrektionsglied handelt, kann man daher ohne größeren Fehler dasselbe durch eine lineare Funktion von  $\frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \left( \frac{h}{H} \right)^4$  ersetzen, und Gleichung (46) geht so in folgenden einfacheren Ausdruck über:

$$\alpha'' \approx 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} [1 - (h/H)^2] - 0,4 \frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \left( \frac{h}{H} \right)^4 \right\} \quad (47)$$

Nach dieser Gleichung berechnete Werte werden in Abb. 10 von strichpunktierten Kurven vertreten. Die Übereinstimmung mit den nach Gleichung (8) und (41) berechneten Werten ist sehr gut befriedigend, im mindesten für etwas stärker ausge-

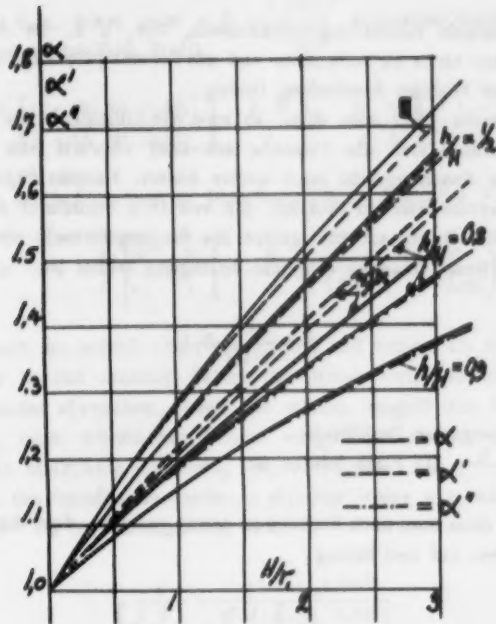


Abb. 10. Horizontalsymmetrische Proportionalprofile.

höhlte Profile. Bei völligen Profilen wechselt das nach Gleichung (45) streng berechnete Korrektionsglied sein Zeichen, sodass die Formel (42) in der Tat genauer als Formel (47) wird, wie die in Abb. 10 eingezeichneten Kurven für  $h/H = 0,5$  zu erkennen geben. Die Abweichungen sind indessen ganz minimal.

Bei gegossenen, geschmiedeten und gefrästen Profilen ist üblicherweise  $f \geq 0,5$  und ferner weisen profilierte Balken in der Regel weniger scharfe Krümmung auf, d. h.  $H/r_1 \leq 2$ . Wie man aus Abb. 10 ersieht, bleibt der Fehler der Näherungsformel (42) bis zu diesen Werten einigermaßen erträglich; überdies befindet man sich stets auf der sicheren Seite. Bei gewalzten Profilen ist zumeist  $f \leq 0,5$ . Die genauere Formel (47) kann in solchen Fällen angewandt werden.

Bei stark ausgehöhlten Profilen erfährt jedoch das Spannungsbild infolge der Deformation des Profils eine Veränderung. So tritt eine Zusammendrückung bzw. Verlängerung des Profils in Richtung des Krümmungshalbmessers ein. Diese Verformung setzt die maximale Biegespannung in den innersten Fasern herab, erzeugt aber andererseits im Stege erhebliche Druck- oder Zugspannungen, die bei Profilen mit dünnem Stege sogar bedeutend größere Höhe als die primären Biegespannungen erreichen können (6) und deshalb bei den Festigkeitsberechnungen berücksichtigt werden

müssen. Bei mässigen Krümmungsverhältnissen,  $H/t_1 \leq 2$ , ist dies im Fall von Proportionalprofilen nicht zu befürchten und die Formel (47) kann daher sogar noch bei sehr schlanken Profilen Anwendung finden.

Sind die Flansche breit aber dünn, so wird die Gültigkeit der Grundformeln in Frage gestellt, indem sich die Flansche entweder einwärts oder auswärts biegen, wodurch sich das Spannungsbild noch weiter ändert. Gemäss Experimenten mit in der Balkenebene symmetrischen Profilen, die von Otto Steinhardt ausgeführt wurden (Dissertationsschrift, Darmstadt 38), gelten die Biegungsformeln nur, wenn mit den hier eingeführten Bezeichnungen folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\beta = \frac{b'}{\sqrt{s \cdot t}} \leq 1 \quad (48)$$

worin

$$\begin{aligned} b' &= \text{die negative Profilbreite,} \\ s &= \frac{H-h}{2} = \text{die Flanschdicke ist.} \end{aligned}$$

Ist  $\beta > 1$ , so muss man nach Steinhardt damit rechnen, dass die freie, effektive Breite des Flansches auf den Betrag

$$b'_{\text{red}} = b' \left[ \frac{1,5}{\beta} - \frac{1}{1,8\beta^2} \right] \quad (49)$$

zurückgeht.

Beachtet man diese Korrektur, so ist dann das reduzierte Profil nicht mehr ein Proportionalprofil und die Biegespannungen müssen nach den im nächsten Abschnitt angegebenen Formeln berechnet werden.

#### HORIZONTALSYMMETRISCHE, NICHTPROPORTIONALE PROFILE

Für nichtproportionale horizontalsymmetrische Profile kann in den meisten Fällen der für Proportionalprofile hergeleitete Ausdruck (42) des Formfaktors  $\alpha'$  ohne störenden Fehler zur Anwendung kommen, wenn in diesem anstelle von  $1 - (h/H)^2$  der Völligkeitsfaktor des Profils  $f = 1 - \frac{b'}{a} \frac{h}{H}$  eingesetzt wird, womit die Formel (42) in folgende Formel übergeht:

$$\alpha' \approx 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \frac{b'}{a} \frac{h}{H} \right] \right] \quad (50)$$

Ganz ebenso wie bei den horizontalsymmetrischen Proportionalprofilen (Abb. 9) zeigt es sich, dass bei einigermaßen gut ausgefüllten nichtproportionalen Profilen der Wert von  $\alpha$  ohne grösseren Fehler als demjenigen des entsprechenden kompakten

Rechtecks gleich, d.h.  $1/\kappa \approx 1/\kappa' = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r_m} \right)^2$  angesehen werden kann. Beachtet man, dass für das ausgehöhlte Profil

$$W_1 = \frac{A H}{6} \left[ \frac{1 - (b'/a) (h/H)^3}{1 - (b'/a) (h/H)} \right] = \frac{A H}{6} \left[ 1 + \frac{b' h}{a H} \left[ \frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a) (h/H)} \right] \right]$$

gilt, ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (8) in ähnlicher Weise wie zuvor

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \frac{b' h}{a H} \left( \frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a) (h/H)} \right) \right] \right] \quad (50 a)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch alzu kompliziert und schwer im Gedächtnis zu behalten; da aber in den meisten Fällen die Werte von  $b'/a$  und  $h/H$  nur unbedeutend voneinander abweichen, kann bei stärker ausgefüllten Profilen der Faktor  $\frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a) (h/H)}$  ohne erheblichen Fehler weggelassen werden und die Gleichung geht dann in die einfachere Gleichung (50) über.

Exakte Werte des Formfaktors werden in gleicher Weise wie bei den Proportionalprofilen erhalten. Da im vorliegenden Fall

$$\frac{1}{1 - i} = \frac{(b'/a) (h/H)^3}{1 - (b'/a) (h/H)^3}$$

gilt, geht die Gleichung (41) über in

$$\kappa = \Theta + (\Theta - \theta) \frac{(b'/a) (h/H)^3}{1 - (b'/a) (h/H)^3} \quad (51)$$

$\Theta$  und  $\theta$  werden nach Gleichung (11) berechnet bzw. Abb. 1 oder Abb. 9 entnommen, wobei zu beachten ist, dass die  $\theta$  entsprechende Abszisse  $\frac{h}{2r} = \frac{H}{2r} \cdot \frac{h}{H}$  ist.

Der Ausdruck für den Formfaktor ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (8) zu

$$\alpha = -\frac{1}{6} \frac{H}{r} \left[ \frac{1 - (b'/a) (h/H)^3}{1 - (b'/a) (h/H)} \right] + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{r}{r_1} \quad (52)$$

Durch Aufzeichnen einer grossen Anzahl nach der Formel (50) berechneter  $\alpha'$ -Kurven sowie der entsprechenden, exakt errechneten Kurven wurde festgestellt, dass die Formel (50) bei gegossenen und gefrästen Profilen vollends anwendbar ist, welche einen Völligkeitsgrad  $f = 1 - (b'/a) (h/H) \geq 0,4$  und ein Krümmungsverhältnis  $H/r_1 \leq 2$  haben. Desgleichen zeigte es sich, dass der Wert von  $\alpha$  trotz unverändertem Völligkeitsgrad absinkt, wenn die Aushöhlungstiefe  $b'/a$  vergrößert wird, welches übrigens auch aus Gleichung (50 a) hervorgeht.

Da der Aushöhlungsgrad  $f' = \frac{b' h}{a H}$  für einen gegebenen Völligkeitsgrad konstant ist, erhält man den erdenklichen Minimalwert von  $\frac{b'}{a}$ , wenn  $\frac{h}{H} = 1$  oder  $\frac{b'}{a} = f'$

ist. Für ein solches Profil wird  $\alpha$  gleich dem Formfaktor eines reinen Rechtecks. In der Praxis ist jedoch dieser hypothetische Wert undenkbar, da er einem Profil mit ungeheuer dickem Stehblech und unendlich dünnen Flanschen entspricht. In tatsächlichen Anwendungsfällen ist daher die Aushöhlungstiefe stets bedeutend grösser. Der entsprechende theoretisch denkbare Maximalwert ist  $\frac{b'}{a} = 1$ , und zwar ist dieser einem Profil mit unendlich dünnem Stehblech und sehr starken Flanschen zugeordnet. Auch dieser Typ wäre praktisch unanwendbar. Somit liegen sämtliche in der Praxis vorkommenden Profile zwischen diesen beiden Extremen.

Als Beispiel sind in Abb. 11 für den Völligkeitsgrad  $f = 0,4$  und für verschiedene Werte Aushöhlungstiefe  $b'/a$  die streng berechneten Kurven  $\alpha$  sowie die nach Formel (50) bestimmten Näherungskurven  $\alpha'$  eingezeichnet. Man sieht, dass der Fehler der Näherungsformel bei praktisch in Frage kommenden Aushöhlungstiefen und Krümmungsverhältnissen noch erträglich ist.

Für gewalzte Profile, die zumeist einen Völligkeitsgrad unter 0,4 haben, ist die Formel nicht mehr zufriedenstellend. In ähnlicher Weise wie bei den Proportionalprofilen kann indessen unter Heranziehung der Gleichung (51), (15) und (52) ein exakterer Ausdruck hergeleitet werden, der jedoch eine sehr komplizierte Gestalt erhält:

$$\alpha'' = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \frac{b' h}{a H} \left( \frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a)(h/H)} \right) \right] - \frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \cdot K \right\} \quad (53)$$

worin

$$K = \left( \frac{b' h}{a H} \right)^2 \frac{0,96 [1 - 0,16 (H/h)^2]}{\left( \frac{b' h}{a H} \right) + \frac{b' h}{a H} [1 - 0,16 (H/h)^2] \left[ \frac{1 - (b'/a)(h/H)}{1 - (h/H)^2} \right]} - 0,04$$

Genau wie bei den Proportionalprofilen erweist es sich, dass ohne grösseren Fehler, da das letzte Glied im Ausdruck (53) nur ein unbedeutendes Korrektionsglied ist, der Faktor  $K$  durch 0,4  $\left( \frac{b' h}{a H} \right)^2$  ersetzt werden kann, womit Gleichung (53) in folgende Gleichung übergeht:

$$\alpha'' \approx 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \frac{b' h}{a H} \left( \frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a)(h/H)} \right) \right] - 0,4 \frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \left( \frac{b' h}{a H} \right)^2 \right\} \quad (53 a)$$

Auch in dieser Form ist der Ausdruck sehr exakt aber recht unhandlich. In den meisten Fällen weicht der Wert von  $b'/a$  nur wenig von  $h/H$  ab und man kann daher den unbequemen Faktor  $\frac{1 - (h/H)^2}{1 - (b'/a)(h/H)}$  ohne erheblichen Fehler auslassen, womit die Formel dann in folgende übergeht:

$$\alpha'' \approx 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r} \left[ 1 - \frac{b' h}{a H} \right] - 0,4 \frac{H}{r} \frac{H}{r_1} \left( \frac{b' h}{a H} \right)^2 \right\} \quad (53 b)$$

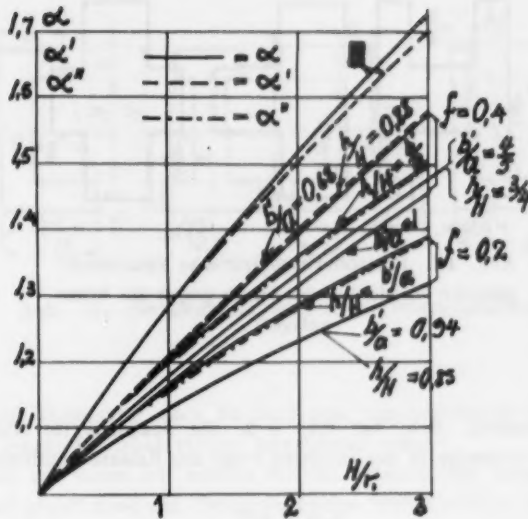


Abb. 11. Horizontalsymmetrische nichtproportionale Profile.

Dieser Ausdruck entspricht der Gleichung (47) für ein Proportionalprofil, welches den gleichen Völligkeitsgrad wie das betrachtete nichtproportionale Profil hat. Der Ausdruck (53b) ist nicht in gleichem Grad exakt wie (53a), aber immerhin vollends anwendbar, da überdies der Fehler in den meisten Fällen auf der sicheren Seite liegen wird, indem man unter Beachtung von Gründen der Materialersparnis fast immer  $b'/a > h/H$  wählt. Als Beispiel sind in Abb. 11 für einen Völligkeitsgrad von nur 0,2 und für verschiedene Aushöhlungstiefen berechnete Werte eingetragen. Bei dem extremsten eingezeichneten Wert, d.h.  $b'/a = 0,94$  und  $h/H = 0,85$ , beläuft sich allerdings der Fehler im Fall  $H/t_1 = 2$  auf 4 %, doch sind hierbei bereits hinsichtlich der Aushöhlungstiefe die praktisch anwendbaren Werte überschritten worden, indem die Normalspannung im Stehblech die Biegespannung im inneren Flansch übertrifft. Bei rationeller Wahl der Aushöhlungstiefe dürfte sich der Fehler der Formel unter 5 % halten. Wie bereits im Zusammenhang mit den Proportionalprofilen angeführt, erfährt nämlich das Profil eine Deformation, die gefährliche Spannungen im Stehblech hervorrufen kann, wenn letzteres übertrieben dünn ist (6). Während man dies bei Proportionalprofilen nicht zu befürchten hat, muss die Spannung im Stehblech bei nichtproportionalen Profilen stets überprüft werden. Mittels Anwendung der von Dr.-Ing. Berg (6) aufgestellten Ausdrücke zur Berechnung der Spannung im Stehblech lässt sich näherungsweise feststellen, dass bei mäßigen

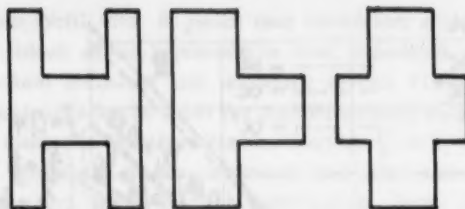


Abb. 12. Horizontalsymmetrische zusammengesetzte Profile mit der Masse gegen die Mitte gelagert.

Krümmungsverhältnissen, d.h. bei  $H/t_1 \leq 2$ , die Spannung im Stehblech nicht höhere Werte als diejenige in der innersten Faser des Balkens annimmt, wenn

$$s_1/a \geq s/H \quad (54)$$

Hieraus erhellt auch, dass die Gefahr einer Überbelastung des Stehblechs in einem Proportionalprofil ausgeschlossen ist, da in einem solchen  $s_1/a = 2 s/H$  ist.

Wie zuvor erwähnt wurde, erfahren ausserdem Profile mit breiten aber dünnen Flanschen eine Durchbiegung, weshalb die Spannungen unter Heranziehung der Steinhardschen Formeln geschätzt werden müssen.

#### HORIZONTALSYMMETRISCHE ZUSAMMENGESETZTE PROFILE MIT DER MASSE GEGEN DIE MITTE

Profile der rubrizierten Art nach Abb. 12 sind in gekrümmten Balken nicht üblich. Sollte ausnahmsweise ein solches Profil vorkommen, so kann der Formfaktor wie für ein einfaches Rechteck nach Gleichung (14) berechnet werden, da die nahe bei der Schwerpunktlinie gelegene, gewöhnlicherweise recht unbedeutende Masse den Wert des Formfaktors nur in unbedeutendem Mass erhöht, wie durchgerechnete Beispiele zeigten.

#### HORIZONTAL UNSYMMETRISCHE PROFILE

Wie zuvor gezeigt wurde, kann der Formfaktor mit praktisch vollkommen hinreichender Genauigkeit nach ein und derselben Formel (14) nicht nur für Rechtecke sondern auch für Trapeze berechnet werden. Demgemäss liegt die Vermutung

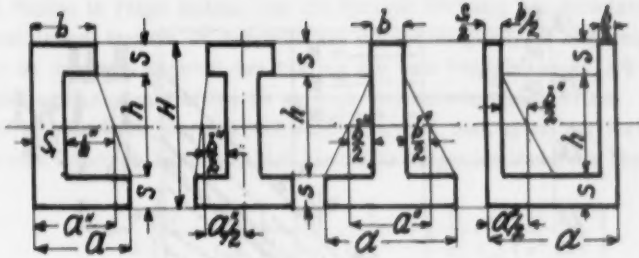


Abb. 13. Horizontalunsymmetrische Proportionalprofile.

nahe, dass der Formfaktor auch für horizontal unsymmetrische zusammengesetzte Profile nach einem ähnlichen Prinzip berechenbar wäre.

Wir wollen uns zuerst mit solchen Profilen befassen, bei denen der innere und äussere Flansch gleich stark sind. Beispiele solcher Profile sind in Abb. 13 zu sehen.

Der Formfaktor einer Anzahl diesartiger Profile wurde nach der im Anhang näher beschriebenen Methode berechnet. Falls der äussere Flansch gänzlich fehlt, wie z.B. bei reinen Winkelprofilen, einfachen umgekehrten T-Profilen und U-Profilen, ist in den Formeln für die Breite des äusseren Flansches  $b = s_1$  = Breite des Stehblechs angenommen worden. Die Werte von  $\alpha$  gelten unabhängig von der absoluten Grösse des Profils, falls die Dimensionen proportional sind, d.h. wenn  $h/H$ ,  $b'/a$  und  $b/a$  unverändert bleiben. Das Völligkeitsverhältnis ist nach dem in Abb. 13 gezeigten Grundgedanken demjenigen des unsymmetrischen Profils entsprechend angenommen worden, d.h.

$$f = 1 - \frac{b''}{a''} \frac{h}{H}$$

worin

$$\frac{b''}{a''} = \frac{\frac{a+b}{2} - s_1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{a+b-2s_1}{a+b} \quad (55)$$

Bei Profilen mit fehlendem äusseren Flansch geht der Ausdruck über in

$$\frac{b''}{a''} = \frac{a-b}{a+b} \quad (55 a)$$

Für Proportionalprofile wird ferner  $\frac{b''}{a''} = \frac{h}{H}$ .

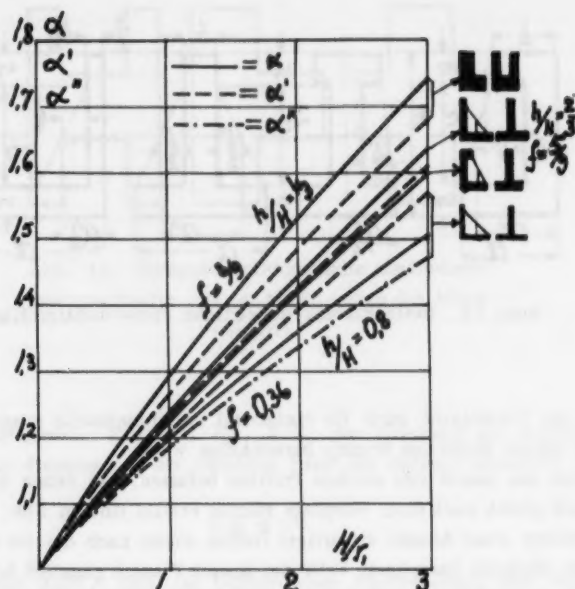


Abb. 14. Horizontal unsymmetrische Proportionalprofile.

In Abb. 14 ist eine Anzahl für Proportionalprofile errechneter Werte  $\alpha$  in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis  $H/h_1$  dargestellt (voll ausgezogene Kurven). Die entsprechenden Werte  $\alpha'$  wurden nach der für symmetrische Profile gültigen Formel (50) berechnet und durch gestrichelte Kurven wiedergegeben. Mit den angeführten Bezeichnungen geht Gleichung (50) über in

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r_m} \left( 1 - \frac{b''}{a''} \frac{h}{H} \right) \right\} \quad (56)$$

worin

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Für Proportionalprofile gilt  $\frac{b''}{a''} \frac{h}{H} = \left( \frac{h}{H} \right)^2$ .

Wie aus Abb. 14 ersichtlich, ist die Übereinstimmung zwischen den exakt berechneten und den nach Gleichung (56) bestimmten Werten bei Proportionalprofilen einigermaßen zufriedenstellend. Es zeigt sich, dass der Formfaktor durch die Asymmetrie eine gewisse Steigerung erfährt, jedoch nicht in so hohem Mass, dass die Formel (56) nicht noch sogar für stark ausgefüllte Profile anwendbar wäre. Wenn

schlankere Profile in Frage stehen, hat die besagte Erhöhung des Formfaktors sogar einen vorteilhaften Einfluss in Betracht auf die Genauigkeit der Näherungsformel. Der Fehler ist durchaus minimal bei Profilen mit dem Völligkeitsgrad 5/9 und auch bei erheblich schlankeren Profilen ist er noch von unbedeutender Grösse.

Für Profile sehr viel grösserer Schlankheit könnte man einen der Formel (53b) entsprechenden Ausdruck benutzen, der hierbei in folgenden Ausdruck übergeht:

$$\alpha'' = 1 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r_m} \left[ 1 - \frac{b''}{a''} \frac{h}{H} \right] - 0,4 \frac{H}{r_1} \frac{H}{r_m} \left( \frac{b''}{a''} \frac{h}{H} \right)^2 \right\} \quad (57)$$

Eine nach dieser Gleichung errechnete Kurve für  $f = 0,36$  und  $h/H = 0,8$  ist in Abb. 14 eingezeichnet. Man sieht, dass sich hier keine höhere Genauigkeit als nach der einfacheren Formel (56) ergibt. Für noch weniger ausgefüllte Profile liefert indessen Gleichung (57) exaktere Werte, aber bei solchen Profilen stellt sich bereits eine derart bedeutende Deformation ein, dass man zu Steinhardts Formeln greifen muss.

#### HORIZONTAL ASYMMETRISCHE, NICHTPROPORTIONALE PROFILE

Profile der rubrizierten Art erhalten gewöhnlicherweise einen relativ starken inneren Flansch und ein verhältnismässig dünnes Stehblech. Falls ein unbedeutender äusserer Flansch vorhanden ist, beeinflusst dieser den Formfaktor nur in geringem Mass und man kann daher ohne grösseren Fehler annehmen, dass  $\frac{h}{H} = \frac{H - 2a}{H}$ . In zuvor beschriebener Weise erhält man  $\frac{b''}{a''}$  aus Gleichung (54) oder (55), und der Völligkeitsgrad wird  $f = 1 - \frac{b''}{a''} \frac{h}{H}$ .

In Abb. 15 sind für eine Anzahl solcher asymmetrischen Profile in Form von voll ausgezogenen Kurven die nach der Beilage streng berechneten Werte des Formfaktors sowie als gestrichelte Kurven die approximativ ermittelten Werte eingetragen. Man sieht, dass für die oben angeführten Profiltypen ohne erheblichen Fehler die einfache Formel (14) angewandt werden kann, falls der Völligkeitsgrad höher als 0,5 ist. Ist der Völligkeitsgrad geringer, so kann die Formel (56) Anwendung finden.

Die Kurven bestätigen auch den zuvor im Zusammenhang mit den Proportionalprofilen hervorgehobenen Umstand, dass sich horizontal asymmetrische Profile anders als horizontalsymmetrische verhalten. Für die symmetrischen Profile mit gegebenem Völligkeitsgrad geht der Wert von  $\alpha$  mit zunehmender Aushöhlungstiefe  $b'/a$  herab, während es sich bei horizontal asymmetrischen Profilen umgekehrt verhält. Da es mit Rücksicht auf Materialersparnis gewöhnlicherweise wünschenswert ist,  $\frac{b''}{a''} > \frac{h}{H}$  zu haben, erklärt sich hierdurch die einigermaßen überraschende Tatsache, dass  $\alpha$  für praktisch in Frage kommende, stark ausgefüllte asymmetrische Profile in der Regel einen Wert annimmt, der höher als nach Gleichung (14) ist, und dass die Formel (56) sogar für recht schlanke Profile noch anwendbare Werte liefert.

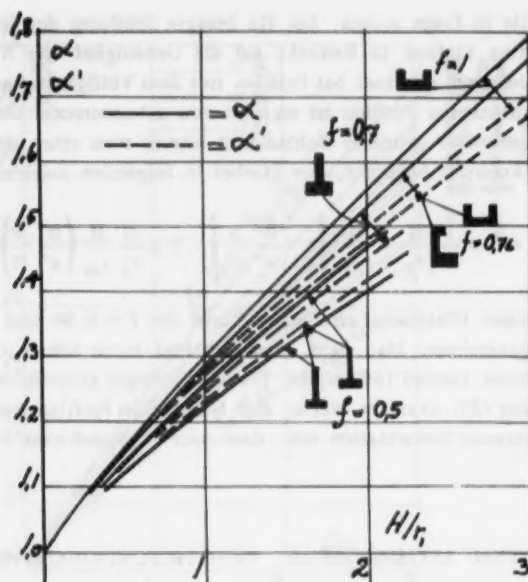


Abb. 15. Horizontal unsymmetrische nichtproportionale Profile.

Bei horizontal asymmetrischen Profilen kann ausserdem im Gegensatz zu den symmetrischen die resultierende Spannung in den äussersten Fasern sogar höher als in den innersten Fasern werden. Man muss daher in derartigen Fällen an Hand von Gleichung (10) die erstere überprüfen und, falls sie zu übermässiger Höhe neigt, die Aushöhlungstiefe vermindern. Gegebenerweise muss daneben die Deformation des Profils nach Steinhardt kontrolliert werden.

Bei gegossenen Kurbel-, Kreuzkopf- und Grundlagerdeckeln kommen mitunter Typen der hier erwähnten Form vor, bei denen jedoch die äussere Basis abgerundet ist, während die innere Basis geradlinig ist, da die innere Fläche stets bearbeitet ist. Da der äussere Flansch einen verschwindenden Einfluss auf den Formfaktor ausübt, kann die Formel (14) bzw. (50) ohne Risiko angewandt werden.

#### UMGEKEHRTE U-PROFILE

Umgekehrte U-Profile mit dem Flansch zuäusserst kommen hin und wieder z.B. als gegossene Lagerdeckel vor. Der Formfaktor kann für solche Profile wie für ein Rechteck nach der Formel (14) berechnet werden. Eine Anzahl durchgerechnete Beispiele zeigen, dass der Fehler ganz unbedeutend ausfällt.

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Formfaktor kann nach der Grundformel (14), d.h.

$$\alpha_{\text{eff}} = 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{H}{r_1} + \frac{H}{r_m} \right)$$

geschätzt werden.

Für einfache Rechtecke, Trapeze und Dreiecke gilt die Formel an sich; bei Profilen, die aus Rechteckelementen zusammengesetzt sind, muss dagegen das zweite Glied in den Klammern mit dem Völligkeitsfaktor des Profils multipliziert werden. Bei horizontal asymmetrischen Profilen ist beim Berechnen des Völligkeitsfaktors nach Formel (55) zu beachten, dass  $h/H = \frac{H - 2s}{H}$  ist, wo  $s$  die Stärke des inneren Flansches bezeichnet.

Für sehr schlanke, gewöhnlicherweise gewalzte Profile muss unter Umständen fernerhin ein vom Quadrat des Aushöhlungsgrads abhängiges, unbedeutendes Korrektionsglied der Form  $-\frac{0,4}{6} \frac{H}{r_1} \frac{H}{r_m} (f')^2$  berücksichtigt werden und ausserdem ist der Einfluss der Deformation der Flansche an Hand von Steinhardts Formeln (48) und (49) in Betracht zu ziehen. Im Falle eines dünnen Stehblechs muss man auch überprüfen, dass dieses nicht übermässig beansprucht wird. Ist  $H/t_1 \leq 2$ , so kann die Kontrolle einfach nach Gleichung (54) erfolgen, d.h.  $s_1/a \geq s/H$ .

Für Kreise, Ellipsen und Rohrprofile führt man die Berechnung in gleicher Weise wie für eckige Profile durch, nur hat man das erste, dominierende Glied im Klammerausdruck um 50 % zu vergrössern, während das zweite Glied 25 % kleiner angesetzt wird.

Bei dünnwandigeren Rohren mit  $d/D \geq 0,6$  bewirkt die Deformation des Profils sekundäre Spannungen, die bei schärferer Krümmung die primären Biegespannungen übertreffen. Der Formfaktor für solche Fälle kann der Abb. 7 entnommen werden.

Sämtliche hier angegebenen Formeln haben ein isotropes Baumaterial zur Voraussetzung.

## ANWENDUNGSBEISPIEL

Als praktisches Anwendungsbeispiel wollen wir den Ständer einer Nietmaschine für 20 000 kp Belastung und mit einer Formgebung laut Abb. 16 wählen (3).

An Hand der Dimensionen in Abb. 16 findet man

$$\begin{array}{ll} A = 416,7 \text{ cm}^2 & M = -20\,000 \cdot (50 + 30 + 12,83) = \\ I = 50\,189 \text{ cm}^4 & = -1\,856\,600 \text{ kpcm} \\ e_1 = 12,83 \text{ cm} & r_1 = 30 \text{ cm} \\ e_2 = 24,97 \text{ cm} & r_2 = 67,8 \text{ cm} \\ & r_m = 48,9 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{l} W_1 = \frac{50\,189}{12,83} = 3912 \text{ cm}^3 \\ W_2 = \frac{50\,189}{24,97} = 2009 \text{ "} \end{array}$$

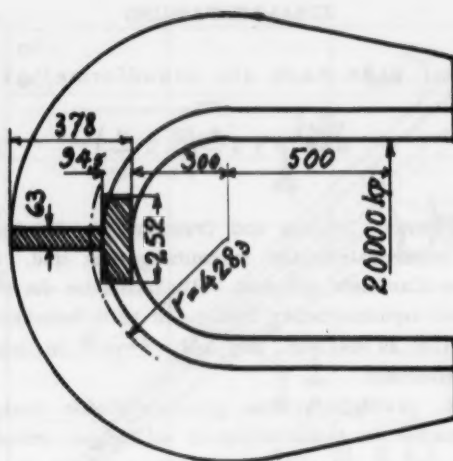


Abb. 16. Ständer für eine Nietmaschine.

Eine Kontrolle an Hand von Steinhardts Formel (48) zeigt, dass die Deformation des Profils nicht beachtet werden braucht. Die Aushöhlungstiefe des Profils ergibt sich nach Gleichung (55a) zu  $\frac{b''}{a''} = \frac{252 - 63}{252 + 63} = 0,6$ , und  $\frac{h}{H} = \frac{378 - 2 \cdot 94,5}{378} = 0,5$ ;

$$f = 1 - 0,5 \cdot 0,6 = 0,7 > 0,5$$

Der Wert von  $\alpha'$  kann somit nach der einfachen Rechteckformel (14) berechnet werden, d. h.

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{6} \left[ \frac{378}{300} + \frac{378}{489} \right] = 1,339$$

Die resultierende Spannung am Innenrand wird

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} - \frac{M}{W_1} \cdot \alpha' = \frac{20\,000}{416,7} + \frac{1\,856\,600}{3\,912} \cdot 1,339 = 48 + 636 = 684 \text{ at}$$

Für den Aussenrand findet man den Formfaktor nach Gleichung (9)

$$\alpha'_2 = 1,339 \frac{30,0}{67,8} + \frac{2009}{416,7 \cdot 67,8} \cdot \frac{37,8}{12,83} = 0,8015$$

Die resultierende Spannung am Aussenrand wird

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_2} \cdot \alpha'_2 = \frac{20\,000}{416,7} - \frac{1\,856\,600}{2009} \cdot 0,8015 = 48 - 740 = -692 \text{ at}$$

Kontrollrechnung nach der in der Beilage angeführten Methode bzw. nach den Formeln von Luthander (3) liefert 686 at bzw. -695 at.

### DEFORMATIONSBESTIMMUNGEN

Zur Bestimmung von Deformationen und zur Untersuchung statisch unbestimmter gekrümmter Balken benötigt man den Wert der Funktion Z.

Direkt kann dieser mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden:

Für Rechtecke, Trapeze mit  $b/a \geq 1/2$  und wenig ausgehöhlte, symmetrische Profile nach Gleichung (12), d.h.  $1/\kappa = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{H}{r}\right)^2$ .

Für kompakte Kreis- und Ellipsenprofile sowie für stärkere Rohrprofile nach Gleichung (18), d.h.  $1/\kappa = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{D}{r}\right)^2$ .

Für stärker ausgehöhlte horizontalsymmetrische Profile nach Gleichung (44) mit  $K = 0,4 (h/H)^4$  bzw.  $K = 0,4 \left(\frac{b'}{a} \frac{h}{H}\right)^2$ .

Indirekt ist der Wert für horizontal asymmetrische Profile erhältlich durch Auflösen der Gleichung (8) nach  $1/\kappa$ , d.h.

$$\frac{1}{\kappa} = \left( \alpha + \frac{W_1}{Ar} \right) \frac{r}{r} \quad (58)$$

Falls der Formfaktor  $\alpha'$  mit Hilfe der hier angegebenen Näherungsausdrücke festgestellt worden ist, kann man den Wert von  $\kappa$  auch für komplizierte, asymmetrische Profile erhalten, indem man den errechneten Wert  $\alpha'$  anstelle von  $\alpha$  in Gleichung (58) einsetzt. Der prozentuelle Fehler wird hierbei sogar geringer als derjenige des approximativen Formfaktors  $\alpha'$ .

Sobald der Wert von Z bekannt ist, können die Deformationen nach den bekannten, in Handbüchern angegebenen Formeln berechnet werden.

Bei dünnwandigen Rohren, deren Profil infolge der Belastung eine Änderung erfährt, müssen beim Kalkulieren die von v. Karmann (5) angegebenen Formeln benutzt werden.

Es liegt ausserhalb des Rahmens der vorliegenden Arbeit, des näheren auf das Berechnen der Deformationen einzugehen, und es soll in dieser Hinsicht auf das zuständige Schrifttum (1,2,3,4 etc.) verwiesen werden.

## BERECHNUNG DER FUNKTION Z FÜR ZUSAMMENGESETZTE PROFILE

Ist ein Profil aus rechteckigen, dreieckigen, trapezförmigen u.a. Elementen zusammengesetzt, so kann der Wert der Funktion Z als Summe der einzelnen Funktionselemente  $Z_1, Z_2, Z_3$  usw. festgestellt werden, wobei die Ausdrücke für die Elemente nach der Grundformel (4) erhalten werden:

$$Z_n = \int y^2 \frac{r}{r+y} dA$$

Das entwickelte Integral erhält indessen ein anderes Aussehen als die üblicherweise in Handbüchern gegebenen, indem die Schwerpunktlinie des Elements im allgemeinen nicht mit der des gesamten Profils zusammenfällt. Der Vollständigkeit halber sollen hier die für die Elemente gültigen allgemeinen Ausdrücke hergeleitet werden.

## RECHTECKELEMENT

Für ein Rechteck ist gemäss Abb. 17

$$dA = a dy$$

$$Z_n = a r \int \frac{y^2 dy}{r+y}$$

Mit der Substitution

$$r + y = z$$

$$y = z - r$$

$$dy = dz$$

wird

$$\begin{aligned} Z_n &= ar \int \frac{(z-r)^2 dz}{z} = ar \int z dz - 2ar^2 \int \frac{dz}{z} + ar^3 \int \frac{dz}{z} = \\ &= ar \frac{z^2}{2} - 2ar^2 z + ar^3 \ln z \end{aligned}$$

und mit Einsetzen von  $z = r + y$

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{ar}{2} (r+y)^2 - 2ar^2 (r+y) + ar^3 \ln (r+y) = \\ &= -\frac{3}{2} ar^3 - ar^2 y + \frac{ary^2}{2} + ar^3 \ln (r+y) \end{aligned} \quad (59)$$

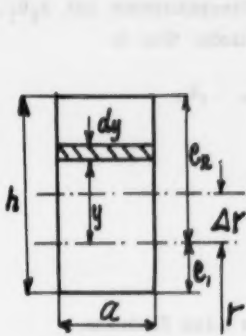


Abb. 17.

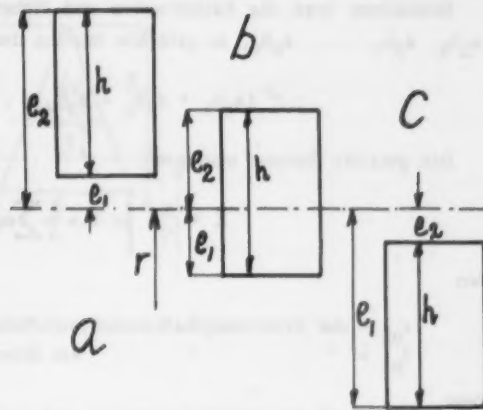


Abb. 18.

Je nach dem ob die Schwerpunktschse des gesamten Profils unter dem Rechteck vorbei (Abb. 18a), durch das Rechteck (Abb. 18b) oder über demselben vorbei läuft, ergeben sich die Integrationsgrenzen

$$e_1 \text{ und } e_2 \text{ bzw. } -e_1 \text{ und } e_2 \text{ bzw. } -e_1 \text{ und } -e_2$$

Für Rechteckelemente laut Abb. 18a ergibt sich

$$Z_n = -ar^2(e_2 - e_1) + \frac{ar}{2}(e_2^2 - e_1^2) + ar^3 \ln \frac{r + e_2}{r + e_1} \quad (59 a)$$

Für Rechteckelemente laut Abb. 18b findet man

$$Z_n = -ar^2(e_2 + e_1) + \frac{ar}{2}(e_2^2 - e_1^2) + ar^3 \ln \frac{r + e_2}{r - e_1} \quad (59 b)$$

und für Elemente laut Abb. 18c

$$Z_n = -ar^2(-e_2 + e_1) + \frac{ar}{2}(e_2^2 - e_1^2) + ar^3 \ln \frac{r - e_2}{r - e_1} \quad (59 c)$$

Werden diese Ausdrücke für Rechteckelemente in einem zusammengesetzten Profil vereinigt, so zeigt es sich, dass die mittleren Glieder verschwinden, da deren Summe einen Faktor gleich der Summe der statischen Momente der Elemente in bezug auf die Schwerpunktschse des Profils enthält.

Bezeichnet man die Basistrecken und Höhen der Rechteckelemente mit  $a_1h_1$ ,  $a_2h_2$ ,  $a_3h_3$ , ...,  $a_nh_n$ , so geht die Summe der ersten Glieder über in

$$- r^2 (a_1h_1 + a_2h_2 + a_3h_3 + \dots a_nh_n) = - r^2 A$$

Die gesamte Summe wird somit

$$Z = r^2 A \left[ -1 + \frac{r}{A} \sum a_n \ln \frac{r_{n2}}{r_{n1}} \right]$$

wo

$r_{n2}$  = der Krümmungshalbmesser am Aussenrand des n-ten Elements,  
 $r_{n1}$  = " " " am Innenrand " " "

oder

$$\kappa = \frac{Z}{I} = \frac{r^2 A}{I} \left[ \frac{r}{A} \cdot \left[ 2,3026 \sum a_n \lg \frac{r_{n2}}{r_{n1}} \right] - 1 \right] \quad (60)$$

Schreibt man für das erste Glied

$$\frac{r}{A} 2,3026 \sum a_n \lg \frac{r_{n2}}{r_{n1}} = \beta \quad \text{so geht Gleichung (60) über in}$$

$$\kappa = \frac{r^2 A}{I} (\beta - 1)$$

Der Ausdruck entspricht den Formeln von Professor Luthander (3), ist aber etwas einfacher zu berechnen. Gleich Luthanders Formeln eignet sich Gleichung (60) zur Kontrolle der in vorliegender Arbeit hergeleiteten Schnellformeln; weniger dagegen, wie bereits erwähnt, zu direkten, praktischen Festigkeitsberechnungen.

#### DREIECKELEMENTE

Für ein Dreieckelement findet man, wenn die Schwerpunktlinie des Dreiecks nicht mit derjenigen des gesamten Profils zusammenfällt (Abb. 19),

$$dA = \frac{b(e_2 - y) dy}{h}$$

$$Z = \int y^2 \frac{r}{r+y} dA = \frac{rb}{h} \int \frac{y^2}{r+y} (e_2 - y) dy =$$

$$= \frac{rbe_2}{h} \int \frac{y^2}{r+y} dy - \frac{rb}{h} \int \frac{y^3}{r+y} dy$$

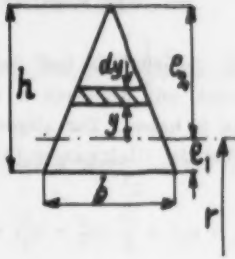


Abb. 19.

Das erste Integral stimmt bis auf den konstanten Faktor mit dem Integral für ein Rechteck überein und liefert folglich

$$\frac{rbe_2}{h} \int \frac{y^2}{r+y} dy = \frac{e_2}{h} \left[ -\frac{3}{2} br^3 - br^2 y + \frac{bry^2}{2} + br^3 \ln(r+y) \right]$$

Im zweiten Integral wird  $r+y = z$  substituiert, und man findet dann in gleicher Weise wie bei den Rechtecken

$$-\frac{rb}{h} \int \frac{y^3}{r+y} dy = -\frac{11}{6} \frac{r^4 b}{h} - \frac{r^3 by}{h} + \frac{r^2 by^2}{2h} - \frac{rby^3}{3h} + \frac{r^4 b}{h} \ln(r+y)$$

Der Ausdruck von  $Z$  wird somit

$$Z = - \left[ \frac{11}{6} r + \frac{3}{2} e_2 \right] \frac{r^3 b}{h} - y \frac{r^2 b}{h} (r+e_2) + \frac{rb}{2h} (r+e_2) y^2 - \frac{rby^3}{3h} + \frac{r^3 b}{h} (r+e_2) \ln(r+y)$$

Integriert man zwischen den Grenzen  $-e_1$  und  $+e_2$ , so hat man

$$Z = -\frac{r^2 b}{h} (r+e_2)(e_2+e_1) + \frac{rb}{2h} (r+e_2)(e_2^2 - e_1^2) - \frac{rb}{3h} (e_2^3 + e_1^3) + \frac{r^3 b}{h} (r+e_2) \ln \frac{r+e_2}{r-e_1}$$

und da  $e_1 + e_2 = h$ ,

$$Z = -r^3 b - \frac{r^2 bh}{2} + \frac{rb}{6} (e_2^2 - e_1 e_2 - 2e_1^2) + \frac{r^3 b}{h} (r+e_2) \ln \frac{r+e_2}{r-e_1} \quad (61)$$

Fällt die Schwerpunktschwerachse mit der eigenen Schwerpunktschwerachse des Dreiecks zusammen, so wird  $e_1 = h/3$  und  $e_2 = 2h/3$ . Das dritte Glied verschwindet und der Ausdruck geht in den bekannten, für ein einfaches Dreieck gültigen Ausdruck über:

$$Z = -r^3 b - r^2 bh/2 + r^3 b(r/h + 2/3) \ln \frac{r+e_2}{r-e_1}$$

## TRAPEZELEMENTE

Einem Trapezelement mit der Höhe  $h$  und der inneren bzw. äusseren Basis  $a$  bzw.  $b$  entspricht ein Rechteck mit der Basis  $b$  und ein Dreieck mit der Basis  $a - b$ , wobei beide die Höhe  $h$  haben. Der allgemeine Ausdruck der Funktion  $Z$  ist folglich, durch Kombination der Gleichungen (59b) und (61):

$$Z = -br^2(e_2 + e_1) + \frac{br}{2}(e_2^2 - e_1^2) + br^3 \ln \frac{r + e_2}{r - e_1} - r^3(a - b) - \frac{r^2h}{2}(a - b) + \frac{r}{6}(a - b)(e_2^2 - e_1e_2 - 2e_1^2) + \frac{r^3(a - b)}{h}(r + e_2) \ln \frac{r + e_2}{r - e_1}$$

und da  $e_2 + e_1 = h$ , d.h. also  $e_2^2 - e_1e_2 - 2e_1^2 = (e_2 + e_1)(e_2 - 2e_1) = h(e_2 - 2e_1)$  wird

$$Z = -r^3(a - b) - \frac{r^2h}{2}(a + b) + \frac{rh}{6}[a(e_2 - 2e_1) + b(2e_2 - e_1)] + r^3 \left[ \frac{a - b}{h}(r + e_2) + b \right] \ln \frac{r + e_2}{r - e_1}$$

Um genaue Auswertung auch mit dem gewöhnlichen Rechenstab zu ermöglichen, werden hier die grossen negativen Glieder weggeschafft, und zwar geschieht dies durch Einführen von

$r_\mu$  = Krümmungshalbmesser der Fasern durch die horizontale Mittellinie des Trapezes

$$\Delta r = r_\mu - r$$

$$r + e_2 = r_2 = r_\mu + h/2$$

$$r - e_1 = r_1 = r_\mu - h/2$$

$$e_2 = r_\mu - r + h/2 = \Delta r + h/2$$

$$e_1 = r - r_\mu + h/2 = h/2 - \Delta r$$

$$\ln \frac{r + e_2}{r - e_1} = \ln \frac{r_\mu + h/2}{r_\mu - h/2} = 2 \left[ \frac{h}{2r_\mu} + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^5 + \dots \right]$$

$$Z = -r^3(a - b) - r^2h \frac{(a + b)}{2} + \frac{rh}{6} [a(3\Delta r - h/2) + b(3\Delta r + h/2)] +$$

$$+ r^3 \left[ \frac{a + b}{2} + (a - b) \frac{r_\mu}{h} \right] 2 \left[ \frac{h}{2r_\mu} + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^5 + \dots \right] =$$

$$= \frac{r^3h}{r_\mu} \frac{(a + b)}{2} - \frac{r^2h}{2}(a + b) + \frac{rh}{2}\Delta r(a + b) - \frac{rh^2}{12}(a - b) +$$

$$r^3 \left[ \frac{a + b}{2} + (a - b) \frac{r_\mu}{h} \right] \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^4 + \dots \right]$$

Die Summe der drei ersten Glieder wird

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)rh}{2} \left[ \frac{r^2}{r_\mu} - r + \Delta r \right] &= \frac{(a+b)rh}{2} \left[ \frac{r_\mu^2}{r_\mu} - 2r_\mu \Delta r + \Delta r^2 - r + \Delta r \right] = \\ &= \frac{(a+b)rh}{2} (r_\mu - 2\Delta r + \Delta r^2/r_\mu - r + \Delta r) = \frac{(a+b)rh}{2 r_\mu} \Delta r^2 \end{aligned}$$

und folglich

$$Z = \frac{(a+b)rh \Delta r^2}{2 r_\mu} - \frac{rh^2}{12} (a-b) + r^3 \left[ \frac{a+b}{2} + (a-b) \frac{r_\mu}{h} \right] \frac{1}{12} \left( \frac{h}{r_\mu} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^4 + \dots \right]$$

oder

$$Z = r^3 \left\{ \frac{(a+b)h}{2 r_\mu} \left( \frac{\Delta r}{r} \right)^2 - \frac{(a-b)(h)}{12} \left( \frac{h}{r} \right)^2 + \left[ \frac{a+b}{2} + (a-b) \frac{r_\mu}{h} \right] \frac{1}{12} \left( \frac{h}{r_\mu} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r_\mu} \right)^4 + \dots \right] \right\} \quad (62)$$

Zur Kontrolle wird die Formel auf ein Trapezelement angewandt, bei dem die Schwerpunktschse des gesamten Profils mit derjenigen des Trapezes zusammenfällt, d. h.  $\Delta r = \frac{h}{6} \cdot \left( \frac{a-b}{a+b} \right)$ . Die zwei ersten Glieder im Klammerausdruck werden dann

$$\frac{(a+b)h}{2 r_\mu} \frac{\Delta r}{r} \left[ \frac{\Delta r}{r} - \frac{1}{6} \frac{(a-b)h}{(a+b)r} \frac{r_\mu}{\Delta r} \right] = \frac{(a+b)h}{2 r_\mu} \frac{\Delta r}{r} \left( \frac{\Delta r - r_\mu}{r} \right) = -\frac{(a+b)h}{2 r_\mu} \left( \frac{\Delta r}{r} \right) = -\frac{(a-b)h}{12} \frac{h}{r r_\mu}$$

Gleichung (62) geht somit in den zuvor angegebenen Ausdruck (23) für ein einfaches Trapez über, da für ein solches  $r_\mu = r_m$  ist.

#### TRAPEZÄHNLICHE PROFILE MIT AUSBUCHTENDEN BASISSTRECKEN

Da bei den in Lasthaken vorkommenden trapezähnlichen Profilen mit gekrümmten Basisstrecken die äussere Basis ganz kurz und die Ausbuchtung unbedeutend ist und da ferner die Oberflächenelemente bei der äusseren Basis mit einem äusserst geringen Beitrag auf die Funktion  $Z$  einwirken, können wir ohne erheblichen Fehler diese Basis durch eine gerade Strecke ersetzt denken und erhalten derart ein Profil nach Abb. 20.

Auch der innere Bogen ist gewöhnlicherweise recht kurz und in unbedeutendem Mass gekrümmt, weshalb man denselben bei der vorliegenden Untersuchung ohne störenden Fehler durch einen Parabelbogen ersetzen kann. Das gesamte Profil wird demnach aus einem Trapez und einem Parabelsegment bestehen, und die Funktion

Z ist die Summe der Funktion  $Z_t$  für das Trapezelement und derjenigen für das Segmentelement,  $Z_p$ .

Der allgemeine Ausdruck für ein Parabelsegment ist mit den Bezeichnungen in Abb. 20

$$Z_p = \int y^2 \frac{r}{r+y} dA = r \int \frac{y^2 \cdot x \, dy}{r+y}$$

Für eine Parabel ist  $(x/a)^2 = (e_3 + y) : (e_3 - e_1)$ , oder

$$x = a \sqrt{\frac{e_3 + y}{e_3 - e_1}}$$

wobei  $y$  für das in der Abbildung gezeigte Segment negativ ist,

$$Z_p = \frac{ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \int \frac{\sqrt{e_3 + y}}{r+y} y^2 dy$$

Es wird substituiert:

$$\begin{aligned} \sqrt{e_3 + y} &= z \\ y &= z^2 - e_3 \\ dy &= 2z \, dz \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \int \frac{z(z^2 - e_3)^2 \cdot 2z \, dz}{r - e_3 + z^2} = \frac{2ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \left\{ \int \frac{[(z^2 - e_3)^2 - r^2] z^2 dz}{z^2 - e_3 + r} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{r^2 z^2 dz}{z^2 - e_3 + r} \right\} = \\ &= \frac{2ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \left\{ \int z^4 dz - (e_3 + r) \int z^2 dz + r^2 \int dz - r^2 \int \frac{(r - e_3) dz}{z^2 - e_3 + r} \right\} = \\ &= \frac{2ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \left\{ \frac{z^5}{5} - (e_3 + r) \frac{z^3}{3} + r^2 z - r^2 \sqrt{r - e_3} \arctg \frac{z}{\sqrt{r - e_3}} \right\} \end{aligned}$$

Setzt man den Wert von  $z = \sqrt{e_3 + y}$  ein, so findet man

$$Z_p = \frac{2ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \left\{ \frac{(\sqrt{e_3 + y})^5}{5} - (e_3 + r) \frac{(\sqrt{e_3 + y})^3}{3} + r^2 \sqrt{e_3 + y} - r^2 \sqrt{r - e_3} \arctg \frac{\sqrt{e_3 + y}}{\sqrt{r - e_3}} \right\}$$

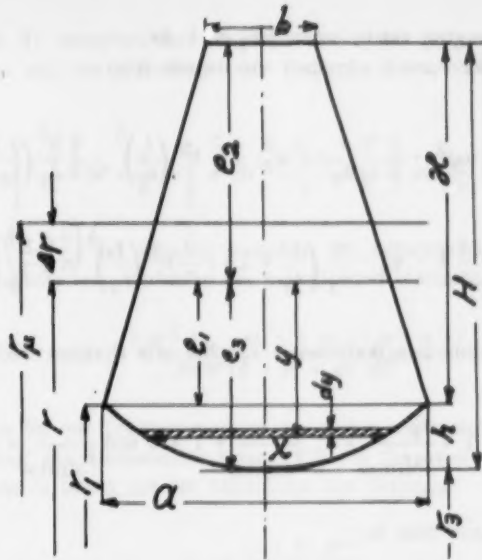


Abb. 20. Trapezähnliches Profil mit gekrümmter Basis.

Integration zwischen den Grenzen  $y = -e_3$  und  $y = -e_1$  liefert

$$\begin{aligned}
 Z_p &= \frac{2 \ar}{\sqrt{e_3 - e_1}} \left\{ \frac{(\sqrt{e_3 - e_1})^5}{5} - (e_3 + r) \frac{(\sqrt{e_3 - e_1})^3}{3} + r^2 \sqrt{e_3 - e_1} - r^2 \sqrt{r - e_3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} \right\} \\
 &= 2 \ar \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{5} - (e_3 + r) \frac{e_3 - e_1}{3} + r^2 - r^2 \sqrt{\frac{r - e_3}{e_3 - e_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} \right\} \\
 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} &= \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} - \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \sqrt{\frac{e_3 - e_1}{r - e_3}} \right)^5 - \dots
 \end{aligned}$$

In die Formel eingesetzt ergibt dies

$$Z_p = 2 \ar \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{5} - (r + e_3) \frac{e_3 - e_1}{3} + \frac{r^2 (e_3 - e_1)}{3} - \frac{r^2 (e_3 - e_1)^2}{5} + \frac{r^2 (e_3 - e_1)^3}{7} - \dots \right\} \quad (63)$$

Führt man hier ein:  $e_3 - e_1 = h$ ,  $r_3 = r - e_3$  bzw.  $e_3 = r - r_3$ , so hat man

$$Z_p = 2 \ar^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{h}{r_3} \left( 1 - \frac{r_3}{r} \right)^2 - \frac{1}{5} \left( \frac{h}{r_3} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{7} \left( \frac{h}{r_3} \right)^3 - \frac{1}{9} \left( \frac{h}{r_3} \right)^4 + \dots \right\} \quad (64)$$

Die Reihe konvergiert rasch, wenn  $h/r_3 \ll 1$  ist.

Zur Kontrolle der Formel schreiben wir sie wie folgt:

$$Z_p = \frac{2}{3} ah \left\{ \frac{r}{r_3} (r-r_3)^2 - \frac{3}{5} \frac{h}{r_3} \frac{r}{r_3} (r^2-r_3^2) + \frac{3}{7} h^2 \left( \frac{r}{r_3} \right)^3 - \frac{3}{9} \frac{h^3}{r_3} \left( \frac{r}{r_3} \right)^3 + \dots \right\} =$$

$$= \frac{2}{3} ah \left\{ \frac{r}{r_3} \cdot e_3^2 - \frac{3}{5} h \cdot e_3 \cdot \frac{r}{r_3} \left( \frac{r}{r_3} + 1 \right) + \frac{3}{7} h^2 \left( \frac{r}{r_3} \right)^3 - \frac{3}{9} \frac{h^3}{r_3} \left( \frac{r}{r_3} \right)^3 + \dots \right\}$$

Lässt man den Krümmungshalbmesser  $r_3$  über alle Grenzen wachsen, so wird

$$\frac{r}{r_3} = 1 + \frac{e_3}{r_{3\lim}} = 1, \quad \frac{r}{r_{3\lim}} + 1 = 2 \quad \text{und} \quad \frac{h}{r_{3\lim}} = 0$$

Ausdruck geht dann über in

$$Z_p = \frac{2}{3} ah \left[ e_3^2 - 2 \frac{3}{5} e_3 h + \frac{3}{7} h^2 \right] = \frac{2}{3} ah \left[ \left( e_3 - \frac{3}{5} h \right)^2 + \frac{3}{7} h^2 - \frac{9}{25} h^2 \right] =$$

$$= \frac{2}{3} ah \left[ \left( e_3 - \frac{3}{5} h \right)^2 + \frac{12}{175} h^2 \right] \quad (65)$$

dem Trägheitsmoment des Parabelsegments in bezug auf die Schwerpunktschwerachse des gesamten Profils entsprechend.

Die Funktion für das gesamte Profil,  $Z = Z_t + Z_p$ , wird somit laut Gleichung (62) und (64) und mit den Bezeichnungen in Abb. 20.

$$Z = r^3 \left\{ \frac{a+b}{2} \frac{r}{r_\mu} \left( \frac{Dr}{r} \right)^2 - \frac{a-b}{12} \left( \frac{r}{r_\mu} \right)^2 + \left[ \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)r}{r_\mu} \right] \frac{1}{12} \left( \frac{r}{r_\mu} \right)^3 \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{r}{2r_\mu} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{r}{2r_\mu} \right)^4 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{3}{9} \left( \frac{r}{2r_\mu} \right)^6 + \dots \right\} + 2ar^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{h}{r_3} \left( 1 - \frac{r_3}{r} \right)^2 - \frac{1}{5} \left( \frac{h}{r_3} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{7} \left( \frac{h}{r_3} \right)^3 - \frac{1}{9} \left( \frac{h}{r_3} \right)^4 + \dots \right\} \quad (66)$$

Zur Kontrolle wurde die Funktion  $Z$  für das zuvor angeführte Beispiel (Abb. 4) berechnet, und es ergab sich  $Z = 1330 \text{ cm}^4$ . Graphische Integration (1) lieferte genau den gleichen Wert.

Den Abstand  $\Delta r$  zwischen der Schwerpunktlinie des gesamten Profils senkrecht zur Balkenebene und der Mittellinie des Trapezes findet man laut Abb. 20 wie folgt:

$$\Delta r \left[ \frac{a+b}{2} \cancel{x} + \frac{2}{3} ah \right] = \Delta r_0 \frac{a+b}{2} \cancel{x} + \frac{2}{3} ah \left( \frac{\cancel{x}}{2} + \frac{2}{5} h \right)$$

worin  $\Delta r_0 = \frac{\cancel{x}}{6} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)$  der Abstand zwischen der Schwerpunktlinie des Trapezes und seiner Mittellinie ist. Einführen des betreffenden Wertes liefert

$$\Delta r = \frac{5 \cancel{x}^2 (a-b) + 4 ah (5 \cancel{x} + 4 h)}{30 \cancel{x} (a+b) + 40 ah}$$

Der Ausdruck für das Trägheitsmoment des Profils ergibt sich bekanntlicherweise durch Anwendung des Steinerschen Satzes. Für das Trapezelement findet man das Trägheitsmoment in bezug auf die Mittellinie des Trapezes:

$$I_m = \frac{(a+b) \cancel{x}^3}{2 \cdot 12}$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerpunktlinie des Trapezes wird

$$I_0 = I_m - \Delta r_0^2 \frac{(a+b)}{2} \cancel{x}$$

und das Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerpunktlinie des gesamten Profils

$$I_t = I_0 + \frac{(a+b)}{2} \cancel{x} (\Delta r - \Delta r_0)^2 = \frac{(a+b)}{2} \cancel{x} \left[ \frac{\cancel{x}^2}{12} + \Delta r^2 - 2 \Delta r \Delta r_0 \right]$$

Das Segment hat in bezug auf die Schwerpunktachse des gesamten Profils das Trägheitsmoment [vgl. Gleichung (65)].

$$I_p = \frac{2}{3} ah \left[ \left( \frac{\cancel{x}}{2} - \Delta r + \frac{2}{5} h \right)^2 + \frac{12}{175} h^2 \right]$$

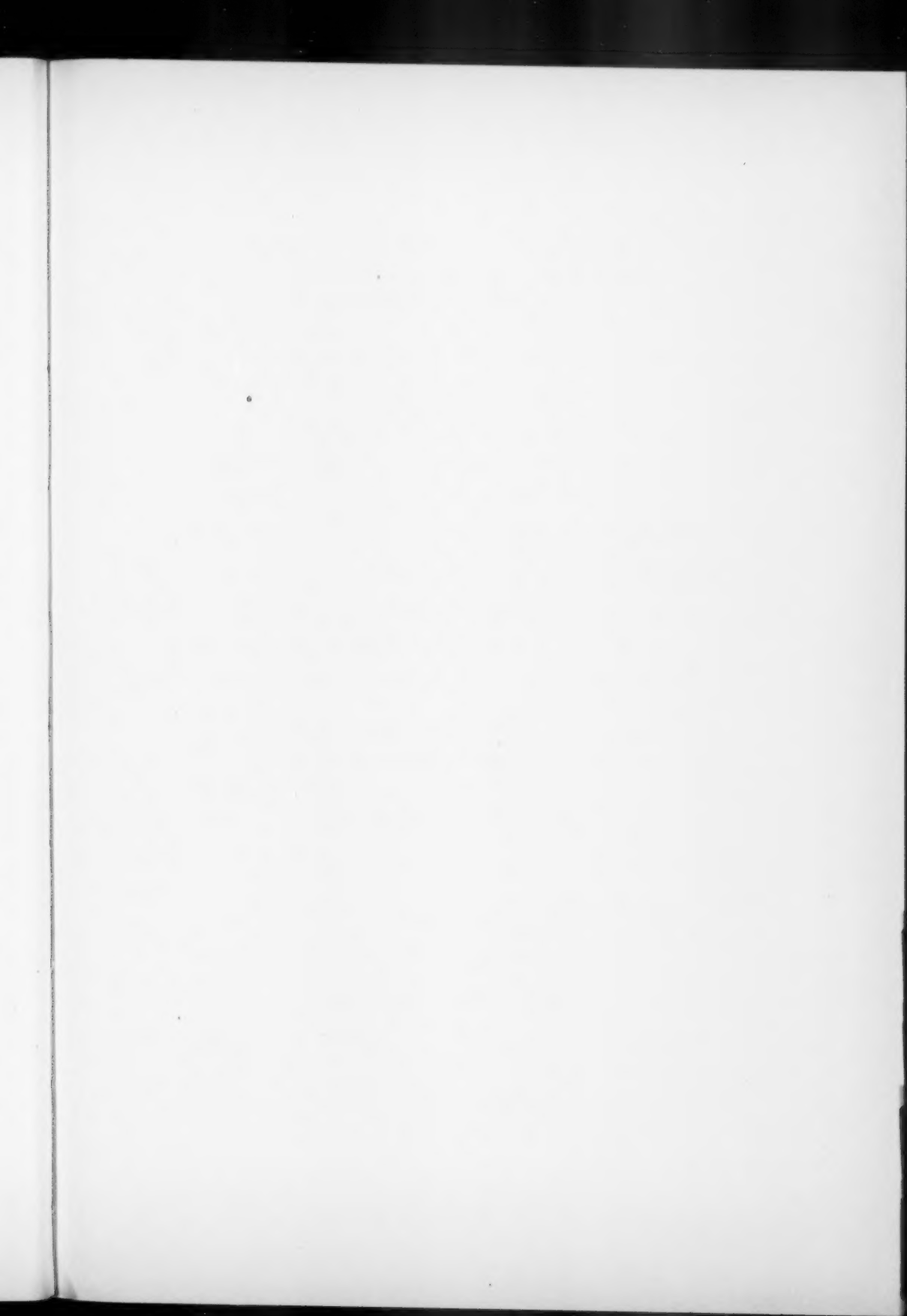
Das Trägheitsmoment des gesamten Profils in bezug auf seine Schwerpunktachse wird

$$I = I_t + I_p$$

Hieraus ergibt sich  $\kappa = Z/I$ .

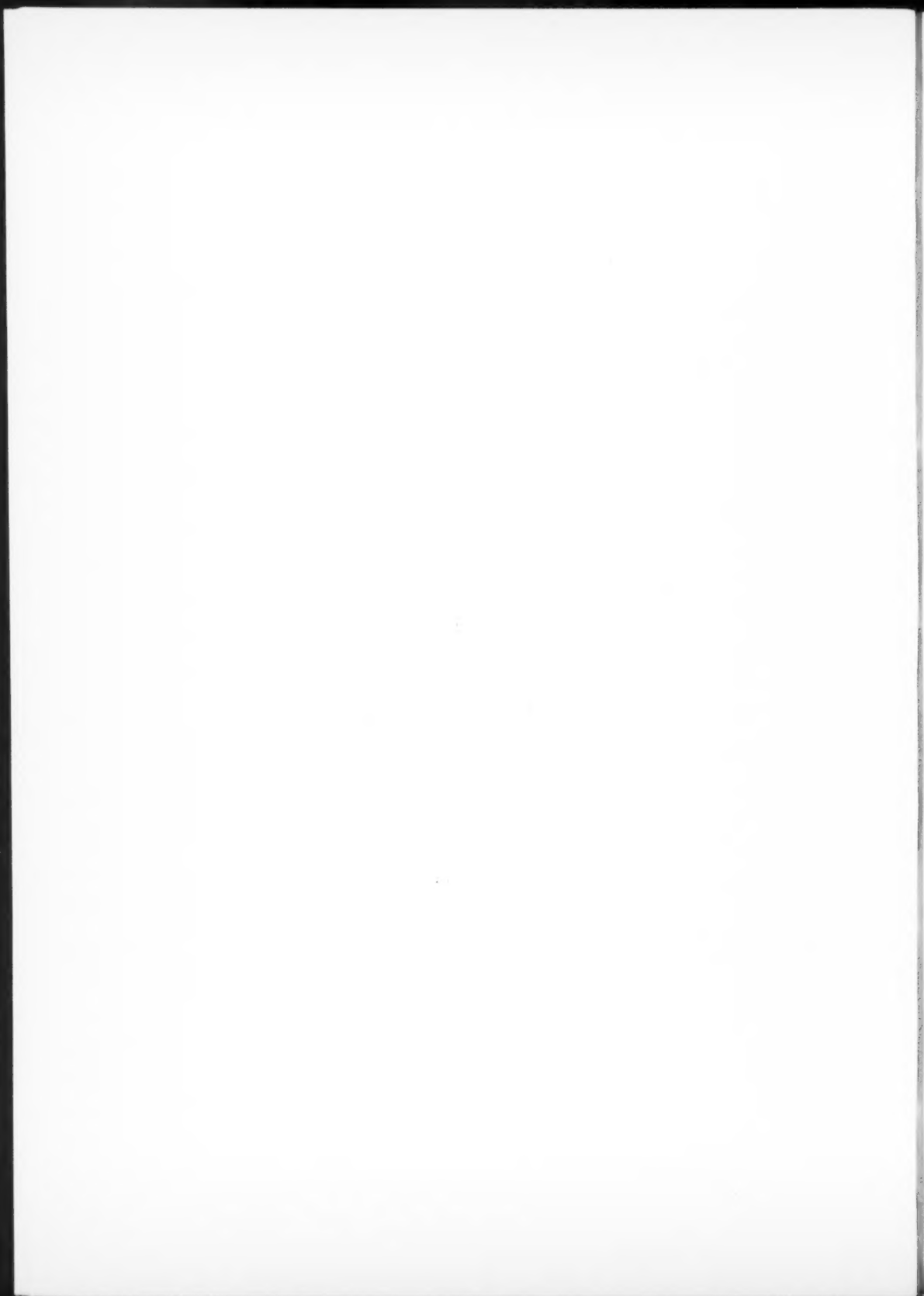
# SCHRIFTTUM

1. Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau, Teil I, S. 368 ... 369, Berlin 1955.
2. A. Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi, Osa II, S. 477 ... 490 und S. 540 ... 543. Porvoo - Helsinki 1950.
3. Woxen, R.: Handbok i Verkstadsteknik, II Aufl., Teil I, S. 89 ... 92. Stockholm 1947. [S. Luthander: Hållfasthetslära.]
4. ten Bosch, M.: Berechnung der Maschinenelemente, 3 Aufl. S. 35 ... 39. Berlin 1953.
5. v. Karmann, Th.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre. Z. Ver. deutsch. Ing. 55 (1911), S. 1889 ... 1895.
6. Berg, S.: Querspannungen im gekrümmten Balken. Konstruktion 6 (1954): 7, S. 245 ... 254.



1. *British Vegetation in the Mountains*, Vol. 2, p. 100. (1911)
2. A. TILLY, *British Vegetation*, Vol. 2, p. 100. (1911)
3. K. H. HUBER, *Vegetation of the Alps*, Vol. 2, p. 100. (1911)
4. J. H. HUBER, *Vegetation of the Alps*, Vol. 2, p. 100. (1911)
5. J. H. HUBER, *Vegetation of the Alps*, Vol. 2, p. 100. (1911)
6. J. H. HUBER, *Vegetation of the Alps*, Vol. 2, p. 100. (1911)
7. J. H. HUBER, *Vegetation of the Alps*, Vol. 2, p. 100. (1911)





## THE LAST VOLUMES OF ACTA POLYTECHNICA

### Civil Engineering and Building Construction Series

(The predecessor of Acta Polytechnica Scandinavica)

#### Volume 4

- Nr 1 LANGE HANSEN, P: *The Plastic Theory of Curved Beams with Compressive Axial Forces*. Acta P 215 (1957). 32 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 624.073.5:539.314
- Nr 2 ISAKSSON, Å: *Creep Rates of Excentrically Loaded Test Pieces*. Acta P 219 (1957). 33 pp. Sw. Kr 4: 50 UDC 610.172.251.2
- Nr 3 IDORN, G M: *Concrete Deterioration of a Foundation*. Acta P 221 (1957). 48 pp. Sw. Kr 8: 00 UDC 620.163.24:693.5
- Nr 4 ÖRDING, F BOYE: *Die Beständigkeit der Basislatten*. Acta P 225 (1957). 16 pp. Sw. Kr 7: 00 UDC 516.23
- Nr 5 SUNDSTRÖM, E: *Creep Buckling of Cylindrical Shells*. Acta P 230 (1957). 34 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 539.434:624.074.4:434.1
- Nr 6 KUDSK-JØRGENSEN, B: *Calculation of Time-Concentration Curves in a Stationary, Laminar Liquid Flow Through a Circular-Cylindrical Tube*. Acta P 233 (1957). 18 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 532.517.3:612.13
- Nr 7 ENGELUND, F: *On the Theory of Multiple-Well Systems*. Acta P 234 (1957). 11 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 551.495.54
- Nr 8 BRINCH HANSEN, J: *Calculation of Settlements by Means of Pore Pressure Coefficients*. Acta P 235 (1957). 14 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 624.131.516
- Nr 9 DAHL, N J: *On Water Supply from Wells*. Acta P 236 (1957). 17 pp. Sw. Kr 5: 00 UDC 551.49:628.112
- Nr 10 LUNDGREN, H: *Dimensional Analysis in Soil Mechanics*. Acta P 237 (1957). 32 pp. Sw. Kr 6: 00 UDC 624.131

## ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA

### Civil Engineering and Building Construction Series

- CI 1 BRETTING, A E: *Stable Channels*. (Acta P 245/1958). 130 pp. Sw. Kr 7: 00 UDC 626.01:627.1
- CI 2 ÖSTERMAN, J: *Notes on the Shearing Resistance of Soft Clays*. (Acta P 263/1959) 24 pp. Sw. Kr. 7.00 UDC 624.131.222
- CI 3 EIDE, OWE AND JOHANNESSEN, IVAR J: *Measurement of Strut Loads in the Excavation for Oslo Technical School*. (Acta P 266/1960) 14 pp. Sw. Kr. 7.00 UDC 624.131.532:624.134.4
- CI 4 JOHANNESSEN, IVAR J: *Test Section and Installation of Test Equipment, Oslo Subway and ØIEN KJELL: An Earth Pressure Cell for use on Sheet Piles* (Acta P 267/1960) 16 pp. Sw. Kr. 7.00 UDC 624.131.386:624.134.4
- CI 5 KJÆRSLI, BJØRN: *Test results, Oslo Subway* (Acta P. 268/1960) 11 pp. Sw. Kr. 7.00 UDC 624.131.532:624.134.4
- CI 6 KYRKLUND, HARALD: *Über die Einschätzung von Biegespannungen in gekrümmten Balken*. (Acta P. 274/1960) 56 pp. + fig. Sw. Kr. 7: 00 UDC 624.072.7
- CI 7 VUORELAINEIN, O: *Thermal Conditions in the Ground from the viewpoint of Foundation Work, Heating and Plumbing Installations and Draining*. (Acta P. 277/1960) 40 pp. Sw. Kr. 7: 00 UDC 624.131.436 + 551.525
- CI 8 VUORELAINEIN, O: *The Temperature Field Produced in the Ground by a Heated Slab Laid direct on Ground, and the Heat Flow from Slab to Ground*. (Acta P. 278/1960) 59 pp. Sw. Kr. 7: 00 UDC 536.2:697.133:69.025.1

**Price Sw. Kr. 7.00**

